ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД УКООПСПІЛКИ
ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ
Кафедра вищої математики і фізики

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

*Навчально-методичний посібник
для самостійного вивчення курсу
для студентів напряму підготовки 6.140103«Туризм»*

Полтава 2014

Автори: ***О. П. Кошова,*** к.пед.н., доцент кафедри вищої математики і фізики ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»

Л.І. Нічуговська, д.пед.н., професор кафедри вищої математики і фізики ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»

О.Г. Фомкіна, к.пед.н., доцент кафедри вищої математики і фізики ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»

А.І.Шурдук, к.фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики і фізики ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»

Н.В. Пономаренко, лаборант кафедри вищої математики і фізики ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»

Рецензенти: **Макарова М.В.,** д.е.н, професор кафедри документознавства та інформаційної діяльності в економічних системах ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»

Роскладка А.А. , д.е.н., професор кафедри економічної кібернетики ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»

Навчально-методичний посібник
розглянуто і схвалено на засіданні кафедри вищої математики та фізики ПУЕТ
протокол № 5 від 16 січня 2014р.
Зав. кафедрою
________ доц. Шурдук А.І.

„УЗГОДЖЕНО”
Декан харчових технологій, готельно-ресторанного та туристичного бізнесу
________________ доц. Карпенко В.Д.
„___” _____________ 2014 р.

„УЗГОДЖЕНО”
Начальник науково-методичного центру управління якістю діяльності
_________________доц. Огуй Н.І.
“___” ____________ 2014 р.

„УЗГОДЖЕНО”
Директор науково-навчального центру
_________________доц. Іванов Ю.В.
„___” _____________ 2014 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Предметом вивчення дисципліни „Вища та прикладна математика” є математичні властивості та закономірності.

Міждисциплінарні зв’язки: „Вища та прикладна математика” – вихідна дисципліна математичного блоку.

Знання і навички, отримані студентами під час вивчення цього курсу, використовуються в подальшому для вивчення дисциплін: економіко-математичне моделювання, економічна теорія, інформаційні системи в економіці, інформаційний менеджмент, статистика, бухгалтерський облік, фінанси і кредит, фінансова математика, теорія прийняття рішень, економічний ризик і методи його обчислення, світова економіка, маркетинг, оподаткування та ін.

Під час вивчення дисципліни студентам необхідно використовувати як основну, так і додаткову рекомендовану літературу. Закріплювати здобуті теоретичні знання слід через розв’язання практичних задач і прикладів, які теж можна знайти у рекомендованих збірниках задач. Також доцільно опрацювати методичні розробки кафедри з цієї дисципліни, які видано раніше. Повна забезпеченість дисципліни навчально-методичними матеріалами дозволяє стимулювати самостійну роботу студентів, таким чином суттєво збільшуючи реальні обсяги викладання цього курсу.

Основною метою є формування у майбутніх менеджерів базових математичних знань для розв’язання задач у професійній діяльності, вмінь аналітичного мислення та математичного формулювання економічних задач.

Основними завданнями, що мають бути вирішені у процесі викладання дисципліни, є надання студентам знань з основних розділів вищої математики: визначень, теорем, правил; доведення основних теорем; формування початкових ***умінь***:

– самостійного опрацювання математичної літератури;
– виконання дій над векторами, матрицями, обчислення визначників;
– розв’язування систем лінійних рівнянь;
– дослідження форм і властивостей прямих та площин, кривих і поверхонь другого порядку;
– знаходження границі ступенево-показникових функцій;
– дослідження функції за допомогою диференційованого числення;
– здійснення інтегральних числень;
– дослідження числових та степеневих рядів;
– розв’язування диференціальних рівнянь першого та вищих порядків;

– самостійно поглиблювати свої знання, розвивати логічне мислення;

– виробити вміння сформулювати свої знання, розвивати реальну прикладну задачу і побудувати її математичну модель.

Зміст компетенцій як результат оволодіння теоретичними знаннями з дисципліни „Вища та прикладна математика” полягає у:

– усвідомленні місця і ролі математики у сучасному світі;

– формуванні математичної культури майбутніх спеціалістів;

– володінні основами математичного апарату, необхідними для ефективного вивчення інших дисциплін, що передбачені освітньо-професійною програмою підготовки бакалаврів;

– оволодінні знаннями заснованими на принципах математичних міркувань і математичних доведень;

– розвиненні алгоритмічного і логічного мислення;

– вміння проаналізувати та сформулювати постановку економічної задачі з використанням математичних та статистичних методів;

– розв’язуванні типових задач в межах вивченого програмного матеріалу;

– використанні у практичній діяльності набутих знань щодо застосування математичних і статистичних методів для дослідження економічних явищ;

– вмінні самостійно працювати з навчально-методичною літературою і використовувати необхідні програмні продукти для аналізу і розв’язування економічних задач;

– вмінні сформулювати реальну прикладну задачу і побудувати її математичну модель на базі набутих математичних знань;

– розв’язуванні практичних задач математичними методами.

Поточний та рубіжний контроль якості одержаних знань, навичок та умінь забезпечується системою спеціально підібраних завдань для самостійних робіт та комплексної контрольної роботи.

Автори передбачили можливість використання методичної розробки як збірника задач для практичних, самостійних та індивідуальних занять.

Детальні заголовки до розділів звільняють від необхідності розгорнутих пояснень щодо структури, характеру та змісту методичної розробки.

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ
"ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА"

Зміст дисципліни за змістовими модулями та темами
Модуль 1. Вища математика
Розділ І. Лінійна алгебра

Тема 1. Предмет та задачі дисципліни

Значення математичної освіти як важливої складової у системі фундаментальної підготовки сучасного менеджера. Приклади вибору математичних методів для розв'язування економічних задач (економічні розрахунки, пов'язані з використанням частот, відсотків, пропорцій матеріальних ресурсів, підрахунком грошей, обчисленням прибутку, податків, рентабельності, розрахунки у сфері просторових відношень та форм економічних об'єктів). Початок алгебри. Дійні числа та дії над ними. Алгебраїчні перетворення. Рівняння з однією змінною: розв'язування лінійних, квадратичних, біквадратних, ірраціональних, показникових, логарифмічних рівнянь. Нерівності.

Тема 2. Система лінійних рівнянь

Поняття про системи лінійних рівнянь. Застосування лінійної алгебри у задачах економіки (використання алгебри матриць, модель Леонтьєва багатогалузевої економіки, лінійна модель торгівлі). Розв'язок системи лінійних рівнянь. Сумісні і несумісні системи рівнянь. Визначені і невизначені системи лінійних рівнянь. Розв'язування систем рівнянь методом послідовного виключення невідомих (методом Гауса).

Тема 3. Визначники

Визначники другого і третього порядків. Визначники *n-го* порядку. Властивості визначників. Мінори і алгебраїчні доповнення. Розкладання визначника за елементами рядка або стовпця. Способи обчислення визначників. Правило Крамера розв'язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими.

Тема 4. Матриці

Види матриць. Елементарні перетворення матриць. Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі про сумісність систем лінійних рівнянь. Системи однорідних рівнянь. Добуток матриці. Обернена матриця. Добуток прямокутних матриць. Додавання матриць і множення матриць на число.

Розв'язування систем лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці. Матричне рівняння.

Тема 5. Жорданові включення

Звичайні та модифіковані жорданові включення. Розв'язування системи лінійних рівнянь за допомогою жорданових включень для аналізу міжгалузевого балансу (статична модель Леонтьева).

Розділ 2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

Тема 6. Вектори

Декартові координати вектора і точки. Приклади економічних задач, пов'язаних із використанням векторної алгебри та аналітичної геометрії. Координати на прямій. Координати на площині. Координати у просторі. Лінійні операції з векторами в координатах. Координати точки поділу відрізка. Координати вектора, що заданий двома точками. Ознака колінеарності двох векторів. Ознака компланарності трьох векторів.

Тема 7. Скалярний добуток

Властивості скалярного добутку двох векторів. Вираз скалярного добутку через координати. Векторний добуток двох векторів, його властивості. Вираз векторного добутку через координати. Мішаний добуток трьох векторів, його властивості. Вираз мішаного добутку через координати векторів-множників.

Тема 8. Пряма на площині

Пряма як лінія першого порядку. Загальне рівняння прямої. Дослідження неповного рівняння прямої. Рівняння прямої у відрізках на осях. Параметричне рівняння прямої. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Кут між двома прямими. Умови перпендикулярності і паралельності двох прямих. Нормальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої.

Тема 9. Площина у просторі

Площина як поверхня першого порядку. Загальне рівняння площини. Дослідження неповного рівняння площини. Рівняння площини у відрізках на осях. Рівняння площини, що проходить через три задані точки. Кут між двома площинами. Умови перпендикулярності і паралельності двох площин. Нормальне рівняння площини. Відстань від точки до площини.

Тема 10. Пряма у просторі

Канонічні рівняння прямої, що проходять через дві задані точки. Кут між двома прямими. Умови перпендикулярності і паралельності двох прямих. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини.

Тема 11. Лінії другого порядку

Еліпс. Дослідження форми еліпса. Гіпербола. Асимптоти гіперболи. Дослідження форми гіперболи. Парабола. Дослідження форми параболи. Ексцентриситет лінії другого порядку. Директриси ліній другого порядку.

Розділ 3. Вступ до математичного аналізу

Тема 12. Функція

Поняття функції. Способи задання функції. Область визначення та область значень функції, парність і непарність, періодичність. Геометричне зображення функції. Класифікація функцій. Елементарні функції та їх графіки. Поняття оберненої функції. Обернені тригонометричні функції. Суперпозиція функцій. Числова послідовність. Означення границі послідовності. Нескінченно малі величини. Нескінченно великі величини. Зв'язок між нескінченно малими та нескінченно великими величинами. Означення границі функції. Односторонні границі. Властивості функцій, що мають скінченні границі. Граничні переходи у рівностях і нерівностях. Леми про нескінченно малі величини. Арифметичні операції над функціями, що мають скінченні границі. Границя функції $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$. Невизначені вирази. Границя монотонності функції. Число e. Натуральні логарифми. Означення неперервності функції в точці. Неперервність функції на відрізку. Арифметичні операції над неперервними функціями. Класифікація розривів. Властивості неперервних функцій. Неперервність елементарних функцій.

Розділ 4. Диференціальне числення функції однієї змінної

Тема 13. Похідна функції однієї змінної

Застосування похідної в економічних розрахунках. Граничні показники в мікроекономіці. Максимізація прибутку і маргінальний аналіз. Оптимізація оподаткування підприємств. Означення похідної. Геометричний, механічний та економічний зміст похідної. Похідні елементарних функцій. Похідна оберненої функції. Таблиця похідних. Правила обчислення похідних. Похідна складної функції. Односторонні похідні. Похідні вищих порядків.

Тема 14. Диференціал функції однієї змінної

Визначення диференціалу. Диференціал суми, добутку і частки. Інваріантність форми першого диференціалу. Диференціали вищих порядків. Застосування диференціалу до наближених обчислень. Основні теореми диференціального числення. Теореми Ферма, Ролля, Лагража, Коші, Правило Лопіталя.

Тема 15. Дослідження функції за допомогою похідних

Умова сталості функції. Умови зростання та спадання функції на проміжку. Максимум і мінімум функції. Необхідні та достатні умови екстремуму функції. Опуклість та угнутість графіка функції, точки перегину, асимптоти графіка функції. Загальна схема побудови графіка функції.

Розділ 5. Функції багатьох змінних

Тема 16. Функції декількох змінних

Функції багатьох змінних у задачах економіки (функція корисності, функція витрат, багатофакторна виробнича функція Кобба-Дугласа). Деякі задачі оптимізації (оптимальний прибуток від виробництва товарів різних видів; задача цінової дискримінації, оптимальний розподіл ресурсів; оптимізація вибору споживача). Функціональна залежність між змінними. Функції двох змінних, область їх визначення. Графічне зображення функції двох змінних. Частинний і повний приріст функції двох змінних. Частинні похідні. Повний диференціал. Похідні вищих порядків. Теорема про рівність мішаних похідних. Диференціали вищих порядків.

Тема 17. Екстремум функції декількох змінних

Необхідні умови екстремуму функції декількох змінних. Достатні умови екстремуму функції декількох змінних. Умови відсутності екстремуму. Поняття про умовний екстремум. Метод множників Лагранжа. Метод найменших квадратів.

Розділ 6. Інтегральне числення функції однієї змінної

Тема 18. Невизначений інтеграл

Поняття первісної функції і невизначеного інтегралу. Застосування інтегралів у задачах економіки. Знаходження обсягу виробничої продукції;

надлишок споживача, аналіз нерівномірності у розподілі доходів серед населення за допомогою кривої Лоренца. Геометричний і механічний зміст інтегралу. Таблиця основних інтегралів. Найпростіші правила інтегрування. Заміна змінної у невизначеному інтегралі. Інтегрування частинами. Інтегрування раціональних дробів. Інтегрування ірраціональних виразів та виразів, що містить геометричні функції. Тригонометричні підстановки.

Тема 19. Визначений інтеграл

Інтегральні суми. Умови існування визначеного інтегралу. Властивості визначеного інтегралу. Обчислення інтегралу. Формула Ньютона-Лейбніца. Заміна змінної у визначеному інтегралі. Інтегрування частинами. Наближене обчислення визначеного інтегралу: формули прямокутників, трапецій, Сімпсона. Геометричні застосування визначеного інтегралу: обчислення площ, об'ємів тіл обертання, довжини дуг кривих. Поняття невласних інтегралів.

Розділ 7. Диференціальні рівняння

Тема 20. Диференціальні рівняння першого порядку

Поняття диференціального рівняння і його розв'язків. Застосування диференціальних рівнянь у задачах економічної динаміки. Модель зростання для постійного темпу приросту; модель зростання в умовах конкуренції; динамічна модель Кейнса; неокласична модель зростання; модель ринку з прогнозованими цінами. Порядок диференціального рівняння. Диференціальні рівняння першого порядку. Загальний розв'язок і загальний інтеграл диференціального рівняння першого порядку. Початкові умови. Частинний розв'язок і частинний інтеграл диференціального рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Однорідні рівняння першого порядку. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Диференціальні рівняння Бернуллі.

Тема 21. Диференціальні рівняння

Поняття диференціального рівняння і його розв'язків. Застосування диференціальних рівнянь у задачах економічної динаміки. Модуль зростання для постійного темпу приросту: модель зростання в умовах конкуренції; динамічна модель Кейнса; неокласична модель зростання; модель ринку з прогнозованими цінами. Порядок диференціального рівняння. Диференціальні рівняння першого порядку. Загальний розв'язок і загальний інтеграл диференціального рівняння першого порядку. Початкові умови. Частинний розв’язок і частинний інтеграл диференціального рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Однорідні рівняння першого порядку. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Диференціальні рівняння Бернуллі.

Тема 22. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Однорідні і неоднорідні диференціальні рівняння. Поняття лінійно-незалежних розв’язків однорідного диференціального рівняння другого порядку. Загальний розв’язок лінійного однорідного рівняння другого порядку. Початкові умови. Структура загального розв’язку неоднорідного диференціального рівняння другого порядку. Лінійні неоднорідні рівняння другого порядку з правими частинами спеціального типу.

Розділ 8. Ряди

Тема 23. Числові ряди

Частинні суми ряду. Необхідна умова збіжності ряду. Ряди з додатними членами. Теорема порівняння рядів. Достатні ознаки збіжності рядів із додатними членами: Даламбера, Коші, інтегральна ознака Маклорена-Коші. Знакозмінні ряди. Абсолютна й умовна збіжність рядів. Знакозмінні ряди. Теорема Лейб ница. Ознака залишку знакозмінного ряду.

Тема 24. Ступеневі ряди

Теорема Абеля. Радіус збіжності ступеневого ряду. Диференціювання та інтегрування ступеневих рядів. Ряди Тейлора і Маклорена. Розкладання елементарних функцій у ряди Тейлора і Маклорена. Застосування ступеневих рядів до наближених обчислень.

Модуль 2. Теорія ймовірностей та математична статистика

Розділ 9. Теорія ймовірностей та математична статистика

Тема 25. Основні поняття теорії ймовірностей

Стохастичний експеримент, його роль та місце при моделюванні соціально-економічних процесів. Предмет теорії ймовірностей. Математична модель стохастичного експерименту. Алгебра випадкових подій. Аксіоматичний підхід до побудови імовірнісного простору стохастичного експерименту. Ймовірності на дискретному просторі елементарних подій. Теореми суми для несумісних і сумісних подій. Правило включення та виключення.

Тема 26. Класичне означення ймовірності та елементи комбінаторного аналізу. Статистичне та геометричне означення ймовірності.

Класичне означення ймовірності. Основні поняття комбінаторного аналізу: основне правило комбінаторики, перестановки, розміщення, сполучення. Геометричне означення ймовірності. Статистичне означення ймовірності та її властивості. Практичне застосування різних підходів до побудови імовірнісного простору.

Тема 27. Умовна ймовірність та поняття про незалежність подій. Формули повної ймовірності та Байєса

Умовна ймовірність та теорема добутку для залежних подій. Поняття попарної незалежності випадкових подій. Незалежність у сукупності. Повна група подій. Формула повної ймовірності та формули Байєса. Приклади використання при послідовній процедурі прийняття рішень (Байєсівський підхід).

Тема 28. Модель повторних випробувань схеми Бернуллі. Теореми Муавра-Лапласа та Пуассона як дослідження асимптотичної поведінки біноміального розподілу.

Повторні незалежні випробування. Схема Бернуллі. Розподіл числа успіхів у серіях незалежних стохастичних експериментів. Біноміальний розподіл. Найімовірніше число успіхів та його ймовірність. Наближені методи обчислення біноміальних ймовірностей та їх точність. Локальна теорема Мавра-Лапласа. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Теорема Бернуллі для оцінки дійсної ймовірності через статистичну частоту. „Рідкісні" події. Теорема Пуассона. Номер першого успішного випробування в схемі Бернуллі.

Тема 29. Дискретні випадкові величини, їх закони розподілу та числові характеристики

Означення випадкових величин та їх класифікація. Закон розподілу дискретної випадкової величини. Числові характеристики розподілу: математичне очікування, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, початкові та центральні моменти. Числові характеристики середнього арифметичного, сукупності випадкових величин. Властивості числових характеристик. Основні закони дискретних розподілів та їх числові характеристики: вироджений, гіпергеометричний розподіл, від'ємний біноміальний розподіл, розподіл Бернуллі та його перетворення, розподіл Пуассона, геометричний розподіл. Приклади застосування стандартних розділів у типових задачах на практиці.

Тема 30. Неперервні та абсолютно неперервні випадкові величини. Функція та щільність розподілу ймовірності. Числові характеристики

Означення неперервних випадкових величин. Функція розподілу ймовірностей випадкової величини та її властивості. Абсолютно неперервні випадкові величини. Щільність розподілу та її властивості. Щільність розподілу функції від абсолютно неперервних випадкових величин. Теорема згортки. Числові характеристики абсолютно неперервних випадкових величин та їх властивості.

Тема 31. Рівномірний, показниковий (експоненціальний) та нормальний закони розподілів імовірностей. Перетворення послідовностей нормально розподілених випадкових величин

Рівномірний закон розподілу ймовірностей та його числові характеристики. Показників закон розподілу. Властивість відсутності післядії. Перетворення послідовностей незалежних випадкових величин. Гамма-розподіл. Нормальний закон розподілу ймовірностей та його стандартне представлення. Розподіл χ^2 (Хі-квадрат) Стьюдента та Фішера, їх зв'язок зі стандартним нормальним розподілом.

Тема 32. Випадкові вектори та закони їх розподілу: сумісні, маргінальні, умовні. Системи незалежних випадкових величин. Умовні та маргінальні числові характеристики

Випадкові вектори та сумісний закон розподілу ймовірностей, його компонент. Властивості функції сумісного розподілу, компонент двовимірного вектора. Маргінальні функції розподілу компонент випадкового вектора. Диск терні випадкові вектори. Маргінальні розподіли ймовірностей компонент випадкового вектора. Абсолютно неперервні розподіли. Щільність сумісного розподілу та її властивості. Маргінальні щільності розподілу компонент випадкового вектора. Умовні закони розподілу ймовірностей випадкового вектора. Характеристика сукупності незалежних випадкових величин. Числові характеристики сумісних розподілів систем випадкових величин: маргінальні та умовні. Коваріація та коефіцієнт кореляції двовимірного випадкового вектора.

Тема 33. Закони великих чисел та центральна гранична теорема

Збіжність послідовностей випадкових величин за ймовірністю та майже напевно. Нерівності Маркова та Чебишева. Закони великих чисел та умови їх виконання. Оцінювання відхилень статистичних частот за законом великих чисел Бернуллі. Слабка збіжність чи збіжність за розподілом. Центральна гранична теорема. Теорема Ляпунова для послідовностей незалежних однаково розподілених випадкових величин. Поняття про метод Монте-Карло. Застосування граничних теорем при формуванні теоретичної бази математичної статистики.

Тема 34. Основні поняття математичної статистики: вибіркові спостереження та вибіркові оцінки

Основні положення вибіркового методу. Вибірковий розподіл. Емпірична функція розподілу та гістограма. Вибіркові моменти. Статистичні оцінки та їх властивості. Збіжність статистичних оцінок – емпіричних характеристик за даними спостережень до теоретичних аналогів. Властивості емпіричної функції розподілу. Властивості гістограми. Властивості вибіркових моментів. Груповані дані вибіркових спостережень.

Тема 35. Методи параметричного та непараметричного оцінювання параметрів

Точкові оцінки параметричної сукупності розподілів. Методи знаходження оцінок: метод моментів і максимальної вірогідності. Порівняння точкових оцінок. Інтервальні оцінки. Загальний алгоритм побудови довірчих границь (інтервальних оцінок) певного рівня значущості для точкових оцінок. Інтервальні оцінки для нормальної статистичної моделі.

Тема 36. Методи перевірки статистичних гіпотез

Загальний алгоритм перевірки статистичних гіпотез. Типи помилок при перевірці гіпотез і потужність критерію. Критерії узгодженості: критерій Колмогорова-Смірнова та Пірсона. Перевірка гіпотез про однорідність та незалежність. Критерії Стьюдента щодо перевірки гіпотез про значення середніх для нормальної статистичної моделі у випадку рівних (нерівних) дисперсія. Критерій χ^2 (Хі-квадрат) про єдину дисперсію для нормальної статистичної моделі. Критерій Фішера про рівність (нерівність) двох дисперсій для нормальної статистичної моделі. Перетворення Фішера для перевірки гіпотез про взаємну незалежність.

Модуль 3. Математичне програмування та дослідження операцій
Розділ 10. Математичне програмування

Тема 37. Предмет математичного програмування

Загальна постановка оптимізаційної задачі, її структура: цільова функція, обмеження як спосіб опису множини допустимих планів. Змістовні приклади задач математичного програмування в економіці, менеджменті. Означення розв'язку цільової функції, точка екстремуму; проблема його пошуку. Геометрична ілюстрація простих оптимізаційних задач з однією та двома змінними.

Тема 38. Лінійне програмування

Загальна постановка задач. Економічні приклади моделей лінійного програмування (задача про призначення, задача оптимального використання сировини, задача оптимізації виробничої програми, матричне планування). Геометричний метод розв'язування задач лінійного програмування з двома змінними; ілюстрація можливих випадків, які трапляються під час розв'язування задачі. Задача лінійного програмування, форми її запису: розгорнута. Правила переходу від загальної задачі лінійного програмування до канонічної та стандартної. Дослідження задачі лінійного програмування: поняття опорного плану, теореми про існування опорного плану, оптимального опорного плану, про геометричні властивості опорного та неопорного планів.

Теоретичні основи симплекс-методу розв'язування задачі лінійного програмування: поняття базису, допустимого базису; взаємозв'язок між базисами та опорним планами; ознаки оптимальності або необмеженості цільової функції на множині допустимих планів; правило покращення неоптимального допустимого базису.

Алгоритм симплекс-методу та його реалізація за допомогою симплекс-таблиць. Поняття про вродженість у лінійному програмуванні. Запобігання за циклюванню у випадку вродженості. Поняття про модифікований алгоритм симплекс-методу. Розв'язування задач лінійного програмування на ПЕОМ.

Тема 39. Двоїстість у лінійному програмуванні

Теорія двоїстості для випадку симетричної пари взаємодвоїстих задач: означення прямої задачі та двоїстої до неї у симетричному випадку, взаємозв'язок між ними; співвідношення між допустимими значеннями цільових функцій прямої та двоїстої задач. Перша та друга теореми двоїстості. Знаходження розв'язку однієї з пар симетричних взаємно двоїстих задач за відомим розв'язком іншої задачі. Економічна інтерпретація теорем двоїстості (оптимальні значення двоїстих змінних як оптимальні оцінки ресурсів у задачах оптимізації плану виробництва).

Теорія двоїстості для випадків, коли вихідною є загальна задача лінійного програмування або канонічна задача. Поняття про двоїстий симплекс-метод.

Тема 40. Методика розв'язування транспортної задачі

Постановка транспортної задачі, умова існування її розв'язку. Пошук оптимального плану перевезень за методом потенціалів. Розв'язування транспортної задачі на ПЕОМ.

Тема 41. Цілочислове програмування

Сутність та класифікація задач цілочислового програмування (кадрова задача, задачі про інвестиції, розподіл обладнання), математична постановка задач цілочислового (дискретного) програмування. Метод відтинань, метод Гоморі, поняття про метод гілок та меж розв'язування задач цілочислового програмування та меж розв'язування задач цілочислового лінійного програмування.

Розділ 11. Дослідження операцій

Тема 42. Предмет та задачі дослідження операцій

Значення використання сучасних математичних методів та моделей в управлінні. Етапи розв'язання задач з використанням математичних методів. Операції та їх ефективність. Поняття економіко-математичної моделі та моделювання. Математична модель операції. Зміст предмета „Дослідження операцій".

Тема 43. Оптимізаційні задачі управління запасами

Задача про розподіл інвестиційних ресурсів між об'єктами, її подання моделлю динамічного програмування; алгоритм знаходження оптимального плану.

Сутність проблеми оптимального управління запасами. Класифікація витрат, пов’язаних зі створенням та зберіганням запасів. Основні теорії управління запасами.

Постановка задачі оптимізації поточних запасів за різних умов постачальника. Статичні детерміновані моделі оптимізації запасів без дефіциту та з дефіцитом. Стохастичні моделі управління запасами. Методи визначення оптимальних страхових запасів на основі дослідження коливань: термінів поставок, одночасно обсягів й термінів поставок дефіцитів матеріалів. Використання методу статистичного моделювання для визначення множини варіантів поставок.

Комплексна задача планування та зберігання продукції в умовах неоднакового попиту в різні періоди.

Тема 44. Задачі масового обслуговування

Сукупність задач масового обслуговування

Характеристика елементів системи масового обслуговування: вимоги, вхідний потік вимог, черга вимог, канали обслуговування, вихідний потік вимог.

Аналіз витрат, які виникають у системі масового обслуговування. Характеристика найпростішого потоку вимог (пуассонівського). Показників закон розподілу часу обслуговування вимог. Класифікація систем масового обслуговування: системи з відмовленнями, з очікуваннями.

Розрахунок параметрів систем масового обслуговування: коефіцієнтів простою вимог у черзі та в системі, простою каналів обслуговування середнього часу очікування вимог у черзі.

Аналіз кількісних оцінок системи масового обслуговування з обмеженою та необмеженою чергою.

Методика визначення оптимальної кількості каналів обслуговування.

Тема 45. Задачі упорядкування та координації. Сітьове планування

Характеристика задач упорядкування та координації. Постановка задачі оптимізації послідовності обробки виробів (надання послуг). Використання методів цілочислового програмування та комбінаторних для розв’язування задач упорядкування.

Зміст і сфери використання сітьових методів планування та управління. Класифікація систем сітьового планування та управління. Характеристика комплексу робіт. Елементи сітьового графіка, методика його побудови. Розрахунки основних параметрів сітьового графіка (аналітичний метод).

Характеристика основних типів сітьових моделей (детерміновані, з урахуванням часу, вартості, ресурсів, не детерміновані).

Методи оптимізації сітьового графіка за критерієм часу: без урахування та з урахуванням ресурсів.

Управління комплексом робіт за допомогою сітьового графіка.

Тема 46. Задачі та моделі заміни

Сутність та класифікація задач заміни.

Постановка задачі заміни обладнання тривалого використання. Оптимізація терміну заміни обладнання при заміні його однотипним або більш продуктивним.

Динамічна модель заміни обладнання.

Оптимізація термінів заміни з метою попередження відмовлень.

Тема 47. Задачі з умовами невизначеності та конфлікту

Характеристика задач стохастичного програмування.

Характеристика задач теорії ігор, приклади (задача оптимізації пропозицій випуску продукції за умов залежності прибутку від попиту; задача про зберігання продукції, яка швидко псується).

Тема 48. Багатокритеріальні задачі в менеджменті

Характеристика, приклади багатокритеріальних оптимізаційних задач. Основні властивості багатокритеріальної задачі, проблема визначення її розв’язку. Методи багатокритеріальної оптимізації управлінських рішень.

Тематичний план дисципліни “Вища та прикладна математика”

Тематичний план дисципліни “Вища та прикладна математика”

№ п/п	Назва розділу, змістового модуля, теми	Кількість годин за видами занять				
		разом	аудиторні		позааудиторні	
			лекції	прак-тичні	інд-конс робота	Сам. робота
1	2	3	4	5	6	7
1	Модуль 1 Вища математика					
	Змістовий модуль 1.					
2	Розділ 1. Лінійна алгебра					
3	Тема 1. Предмет та задачі дисципліни	-	-	-	-	-
4	Тема 2. Системи лінійних рівнянь	5	1	2	-	2
5	Тема 3. Матриці	5	1	2	-	2
6	Тема 4. Визначники	6	2	2	-	2
7	Тема 5. Жорданові включення	4	-	-	-	4
8	Розділ 2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії					
9	Тема 6. Вектори	2	-	-	-	2
10	Тема 7. Скалярний добуток	5	1	2	-	2
11	Тема 8. Пряма на площині	5	1	2	-	2
12	Тема 9. Площина у просторі	2	-	-	-	2
13	Тема 10. Пряма у просторі	2	-	-	-	2
14	Тема 11. Лінії другого порядку	2	1		-	1
15	Розділ 3. Вступ до математичного аналізу					
16	Тема 12. Функція	4	1	2	-	1
17	***Розділ 4. Диференціальне числення функції однієї змінної***					
18	Тема 13. Похідна функції однієї змінної	4	1	2	-	1
19	Тема 14. Диференціал функції однієї змінної	4	-	-	-	4

20	Тема 15. Дослідження функції за допомогою похідних	6	1	2	1	2
21	*Розділ 5. Функції багатьох змінних*					
22	Тема 16. Функції декількох змінних	4	-	-	-	4
23	Тема 17. Екстремум функції декількох змінних	2	-	-	-	2
24	Розділ 6. Інтегральне числення функції однієї змінної					
25	Тема 18. Невизначений інтеграл	5	1	2	1	1
26	Тема 19. Визначений інтеграл	4	1	2	-	1
27	Розділ 7. Диференціальні рівняння					
28	Тема 20. Диференціальні рівняння першого порядку	2	-	-	-	2
29	Тема 21. Диференціальні рівняння	2	-	-	-	2
30	Тема 22. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами	1	-	-	-	1
31	Розділ 8. Ряди					
32	Тема 23. Числові ряди	2	-	-	-	2
33	Тема 24. Степеневі ряди	2	-	-	-	2
	Модульна контрольна робота № 1	2		2		
34	Разом по модулю 1	**82**	**12**	**22**	**2**	**46**
Модуль 2 Теорія ймовірностей та математична статистика						
Змістовий модуль 2						
35	***Розділ 9. Теорія ймовірностей та математична статистика***					
36	Тема 25. Основні поняття теорії ймовірностей	3	1	-	-	2

37	Тема 26. Класичне означення ймовірності та елементи комбінаторного аналізу. Статистичне та геометричне означення ймовірності	5	1	2	1	1
38	Тема 27. Умовна ймовірність та поняття про незалежність подій. Формули повної ймовірності та Байєса	4	1	1	-	2
39	Тема 28. Модель повторних випробувань схеми Бернуллі. Теореми Муавра-Лапласа та Пуассона.	4	1	1	-	2
40	Тема 29. Дискретні випадкові величини, їх закони розподілу та числові характеристики	4	1	2	-	1
41	Тема 30. Неперервні та абсолютно неперервні випадкові величини. Функція та щільність розподілу ймовірності. Числові характеристики	4	1	1	1	1
42	Тема 31. Рівномірний, показниковий та нормальний закони розподілів ймовірностей.	3	1	1	-	1
43	Тема 32. Випадкові вектори та закони їх розподілу; сумісні, маргінальні, умовні. Системи незалежних випадкових величин	2	-	-	-	2
44	Тема 33. Закони великих чисел та центральна гранична теорема	2	-	-	-	2
45	Тема 34. Основні поняття математичної статистики: вибіркові спостереження та вибіркові оцінки	5	1	2	-	2
46	Тема 35. Методи параметричного та непараметричного оцінювання параметрів	4	-		-	4

47	Тема 36. Методи перевірки статистичних гіпотез	4	-	-	-	4
48	Модульна контрольна робота № 2	2		2		
49	**Разом по модулю 2**	**46**	**8**	**12**	**2**	**24**
Модуль 3 Математичне програмування і дослідження операцій						
Змістовий модуль 3						
50	***Розділ 10. Математичне програмування***					
51	Тема 37. Предмет математичного програмування	-	-	-	-	-
52	Тема 38. Лінійне програмування	8	2	4	-	2
53	Тема 39. Двоїстість у лінійному програмуванні	10	2	4	-	4
54	Тема 40. Методика розв'язування транспортної задачі	10	2	4	-	4
55	Тема 41. Цілочислове програмування	11	2	4	1	4
56	***Розділ 11. Дослідження операцій***					
57	Тема 42. Предмет та задачі дослідження операцій	4	2	-	-	2
58	Тема 43. Оптимізаційні задачі управління запасами	10	2	4	-	4
59	Тема 44. Задачі масового обслуговування	10	2	4	-	4
60	Тема 45. Задачі упорядкування та координації. Сітьове планування	9	2	2	1	4
61	Тема 46. Задач та моделі заміни	4	-	-	-	4
62	Тема 47. Задачі з умовами невизначеності та конфлікту	6	2	2	-	2
63	Тема 48. Багатокритеріальні задачі в менеджменті	4	-	-	-	4
64	Модульна контрольна робота № 3			2		
65	**Разом по модулю 3**	**88**	**18**	**30**	**2**	**38**
66	**Разом по дисципліні**	**216**	**38**	**64**	**6**	**108**

Методичні рекомендації до самостійного вивчення навчальної дисципліни

Модуль І. Лінійна, векторна алгебра. Аналітична геометрія
РОЗДІЛ І. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Тема 2. Системи лінійних рівнянь

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, який містить наступні питання: система m лінійних рівнянь з n невідомими, метод Крамера, метод оберненої матриці, теорема Кронекера-Капеллі, метод Жордана-Гаусса.

1.3. План практичного заняття

1. Метод Крамера.
2. Метод оберненої матриці.
3. Метод Жордана-Гаусса.

Термінологічний словник ключових понять

Система n лінійних рівнянь *з* n змінними має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

де a_{ij} – дійсні числа, які називаються коефіцієнтами системи (i – номер рівняння, j – номер невідомого), b_i – вільні члени рівняння.

Розв'язком системи (1) називається така сукупність n чисел, підстановка яких у систему замість невідомих перетворює кожне рівняння системи у тотожність (кажуть, що ця сукупність задовольняє систему рівнянь).

Система рівнянь називається сумісною, якщо вона має хоча б один розв'язок, і несумісною, якщо вона розв'язків не має.

Сумісна система рівнянь називається **визначеною**, якщо вона має один розв'язок, і невизначеною, якщо вона має більше одного розв'язку.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь називаються рівнозначними або еквівалентними, якщо їх розв'язки збігаються.

Елементарне перетворення системи лінійних алгебраїчних рівнянь – це:

1) перестановка місцями рівнянь системи;

2) викреслення рівняння системи, у якого всі коефіцієнти при невідомих і вільний член дорівнює нулю, тобто викреслення тривіального рівняння;

3) множення обох частин будь-якого рівняння системи на число, яке не дорівнює нулю;

4) заміна i-го рівняння системи, яке отримується способом почленного додавання i-го і j-го рівнянь системи.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Метод Крамера. Якщо основний визначник Δ неоднорідної системи n лінійних рівнянь з n невідомими не дорівнює нулю, то ця система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = (1...n)$, де Δ_i – допоміжний визначник, який одержується з основного визначника за рахунок заміни його i-го стовпця стовпцем вільних членів системи.

Приклад 3. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$

Розв'язання. Знайдемо основний визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Допоміжні визначники системи:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 7. \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -22. \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -21.$$

Використовуючи правило Крамера, маємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}; \qquad x_2 = \frac{-22}{-3} = \frac{22}{3}; \qquad x_3 = \frac{-21}{-3} = 7.$$

Матричний метод. Якщо записати систему лінійних алгебраїчних рівнянь у матричній формі $A \cdot X = B,$ де A – це матриця, що складається із коефіцієнтів при невідомих у системі лінійних алгебраїчних рівнянь, X – матриця невідомих, B – матриця вільних членів системи:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Тоді розв’язок даної системи знаходимо із рівності $X=A^{-1}\cdot B$, де A^{-1} – обернена матриця матриці *A*.

Приклад 4. Розв’язати систему лінійних рівнянь матричним способом:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=14 \\ x_1+x_2-x_3=0 \\ x_1-x_2+x_3=2 \end{cases}$$

Розв’язання. Знайдемо основний визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-2\cdot(2+3)=-10.$$

Для розв’язання цієї системи лінійних рівнянь матричним способом спочатку знаходимо обернену матрицю до матриці *A*:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ тобто матрицю } A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

де $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$ – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij};

M_{ij} – його мінор. Маємо:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0; \quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-5; \quad A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-5;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2; \quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2; \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=4;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2; \quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=3. \quad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1.$$

Таким чином, $A^{-1} = -\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,2 & -0,4 \\ 0,2 & -0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$

Оскільки $X = A^{-1} \cdot B$ – розв’язок цієї системи. Маємо:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,2 & -0,4 \\ 0,2 & -0,3 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 14 + & 0,5\cdot 0 + & 0,5\cdot 2 \\ 0,2\cdot 14 + & 0,2\cdot 0 - & 0,4\cdot 2 \\ 0,2\cdot 14 - & 0,3\cdot 0 + & 0,1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Звідки $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$.

Метод Гауса. Метод послідовного виключення змінних полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень систему треба привести до трикутного (ступінчастого) вигляду.

Приклад 5. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса $\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

Розв’язання. Розділимо перше рівняння системи на 3, для того щоб отримати коефіцієнт 1 при змінній x_1. Після цього перше рівняння системи помножимо на (–2) і додамо до другого; потім перше рівняння помножимо на (–1) та додамо до третього рівняння:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \quad \times(-2),\ \times(-1) \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Після виконаних елементарних перетворень отримаємо систему:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ \quad -5x_2 - 5x_3 = 0 \\ \quad -2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Розділивши друге рівняння системи на (–5), отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ \quad x_2 + x_3 = 0 \quad \times(2) \\ \quad -2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Помножимо друге рівняння системи на 2 і додамо його до третього.

Маємо систему $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

Ми привели систему до трикутного вигляду. Із останнього рівняння маємо: $x_3 = 1$, із другого рівняння: $x_2 = -1$ і, нарешті, підставивши знайдені корені у перше рівняння, отримуємо: $x_1 = 2$.

Отже, розв'язком даної системи є числа (2; –1; 1).

Завдання для самостійної роботи

Перевірити систему лінійних алгебраїчних рівнянь на сумісність і у випадку її сумісності знайти її розв'язок:

а) за формулами Крамера;

б) матричним способом;

в) методом Гауса:

1. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \\ 3x_2 - 7x_3 = -6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 3x_3 = -6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

Тема 3. Визначники

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, який містить наступні питання:, їх властивості, мінори та алгебраїчні доповнення, основні властивості визначників, обчислення визначників вищих порядків, теорема Лапласа.

План практичного заняття

1. Визначники 2-го та 3-го порядку.
2. Визначники *n*-го порядку.
3. Розклад визначника за елементом будь-якого рядка.

Термінологічний словник ключових понять

Визначником *n*-го порядку квадратної числової матриці A називається число, яке знаходиться з елементів матриці A за певним правилом. Визначник матриці A позначається $|A|$, $det\ A$ або Δ.

Визначник *n*-го порядку має такий вигляд:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Числа a_{ij} $\left(i, j = \overline{1,n}\right)$ називаються **елементами визначника** (i – номер рядка, j – номер стовпчика квадратної таблиці, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}).

Головна діагональ визначника – це сукупність елементів $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, сукупність елементів $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ – допоміжна діагональ.

Для визначника $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ елементами головної діагоналі є числа $1, 5, 9$, допоміжної діагоналі – числа 3, 5, 7.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник $(n-1)$-го порядку отриманий з визначника *n*-го порядку викресленням *i*-го рядка і *j*-го стовпчика.

Наприклад, у визначнику $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ мінором M_{33} елемента a_{33} є $M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$. Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} визначається рівністю $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Наприклад, у визначнику (1) алгебраїчним доповненням елемента a_{32} є $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Визначником 2-го порядку називається число, що обчислюється за правилом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Наприклад: $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-5) \cdot 3 = 2 + 15 = 17$.

Визначником 3-го порядку називається число, що обчислюється за правилом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}.$$

Наприклад:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & -8 \\ 0 & -8 & 5 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-8) \cdot 5 + (-8) \cdot 0 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \cdot 5 - (-8) \cdot (-8) \cdot 6 - 5 \cdot 4 \cdot 0 - 5 \cdot 5 \cdot 2 =$$

$$= -200 - 0 + 120 - 384 - 0 - 50 = -514.$$

Для обчислення визначника третього порядку можна також користуватися такою схемою:

$$\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}$$

Визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка чи стовпця на їхні алгебраїчні доповнення

$$\Delta = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + \ldots + a_{in}\cdot A_{in}.$$

Наприклад: $\begin{vmatrix}3&4&-1&2\\2&1&3&0\\-1&2&2&1\\3&2&2&1\end{vmatrix}=4\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2&3&0\\-1&2&1\\3&2&1\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}3&-1&2\\-1&2&1\\3&2&1\end{vmatrix}+$

$$+2\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3&-1&2\\2&3&0\\3&2&1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{4+2}\cdot\begin{vmatrix}3&-1&2\\2&3&0\\-1&2&1\end{vmatrix}=$$

$$=-4\cdot12+1\cdot(-20)-2\cdot1+2\cdot25=-48-20-2+50=-20.$$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити визначники:

1. а) $\begin{vmatrix}6&7&3\\3&1&0\\2&5&-1\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}1&-2&3&4\\2&0&1&-1\\3&-3&1&0\\4&2&1&-2\end{vmatrix}$

2. а) $\begin{vmatrix}3&5&4\\-2&0&5\\6&7&8\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}5&6&-1&2\\8&6&8&2\\3&-1&-2&5\\7&5&9&3\end{vmatrix}$

3. а) $\begin{vmatrix}2&5&3\\8&4&-8\\1&5&3\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}-4&1&2&0\\2&1&2&3\\-3&3&0&1\\1&2&1&-2\end{vmatrix}$

4. а) $\begin{vmatrix}3&5&5\\7&1&2\\1&6&0\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}6&0&-1&1\\2&-2&0&1\\1&1&-3&3\\4&1&-1&2\end{vmatrix}$

5. а) $\begin{vmatrix}6&7&9\\5&1&2\\-1&2&8\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}3&-5&1&2\\0&1&1&2\\3&1&3&0\\1&2&-1&2\end{vmatrix}$

6. а) $\begin{vmatrix}8&7&2\\1&-5&7\\0&3&2\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}8&5&1&0\\-2&7&3&7\\8&4&8&7\\3&7&8&-4\end{vmatrix}$

7. а) $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 7 & 8 & 2 \\ 6 & 4 & 8 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 & 1 \\ 2 & -4 & 5 & 4 \\ 8 & 3 & 5 & -2 \\ 4 & 7 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ 8. а) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & -6 \\ 4 & 8 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 & -5 \end{vmatrix}$

9. а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \\ 2 & 7 & 9 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 8 & 4 \\ 6 & 8 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ 10. а) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

Тема 3. Елементи теорії матриць

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, який містить наступні питання теми: матриця, види матриць; дії з матрицями, обернена матриця, алгоритм знаходження оберненої матриці, ранг матриці, елементарні перетворення матриць.

План практичного заняття

1. Дії з матрицями (додавання, множення, віднімання матриць).
2. Знаходження оберненої матриці.
3. Ранг матриці.

Термінологічний словник ключових понять

Матрицею називається упорядкована таблиця чисел або інших об’єктів, розміщених у ℓ рядках і n стовпчиках.

Елементи цієї таблиці називаються елементами матриці та позначаються a_{ij}, b_{ij}, …, де i – номер рядка, j – номер стовпчика.

Матрицю позначають однією великою літерою $A, B, \ldots$.

Матрицю, яка має m рядків і n стовпчиків, називають матрицею розміром $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матриця називається матрицею-стовпцем, якщо має лише один стовпець.

Матриця називається матрицею-рядком, якщо вона складається тільки з одного рядка.

Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається нульовою.

Матриця, у якій кількість рядків дорівнює кількості стовпців ($m = n$), називається квадратною.

Квадратна матриця називається невиродженою, якщо її визначник відмінний від нуля.

Елементи квадратної матриці $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ утворюють головну діагональ матриці. Елементи квадратної матриці $a_{1n}, a_{2n-1}, ..., a_{n1}$ – допоміжну діагональ.

Діагональною називається квадратна матриця, у якої всі елементи, що не належать головній діагоналі, дорівнюють нулю.

Одинична матриця – це діагональна матриця, у якій всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці. Одинична матриця позначається літерою *E*, тобто одинична матриця 3-го порядку має вигляд:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Якщо, в матриці В рядки записати стовпцями, зберігаючи їх порядок, то одержана матриця називається транспонованою і позначається A^T, а вказана операція перетворення матриці *A* називається транспонування матриці *A*.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

1. Додавання і віднімання матриць.

Ці операції виконуються тільки для матриць однакової розмірності. Сумою (різницею) матриць *A* і *B*, що позначається $A + B$ $(A - B)$, називається матриця *C*, елементи якої $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, де a_{ij} і b_{ij} – відповідно елементи матриць *A* і *B*.

Приклад 1.

Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$. Знайти *A* + *B*, $A - B$.

Розв'язання:

$$A+B=\begin{pmatrix} 3+(-4) & 2+6 & (-8)+(-2) \\ 4+2 & 5+3 & 0+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 8 & -10 \\ 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 3-(-4) & 2-6 & (-8)-(-2) \\ 4-2 & 5-3 & 0-7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -4 & -6 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

2. Множення матриці на число.

Добутком матриці *A* на число λ, який позначається $\lambda \cdot A$, називається матриця *B* тієї ж розмірності, елементи якої $b_{ij}=\lambda \cdot a_{ij}$, де a_{ij} – елементи матриці *A*.

3. Множення матриць.

Дві матриці можна перемножити, якщо кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці. Добутком матриць $A_{m\cdot n}$ і $B_{n\cdot p}$ називається матриця $C_{m\times p}=A\cdot B$, елементи якого $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, де a_{ik} і b_{kj} – елементи матриць *A* і *B*.

Наприклад, якщо дано матриці

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 0 & -3 \\ 6 & 0 & 7 & -2 \end{pmatrix} \text{ і } B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ тоді}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1\cdot 2+3\cdot 5+2\cdot 3+(-1)\cdot 0 & 1\cdot 1+3\cdot 4+2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-3) \\ 4\cdot 2+5\cdot 5+0\cdot 3+(-3)\cdot 0 & 4\cdot 1+5\cdot 4+0\cdot(-2)+(-3)\cdot(-3) \\ 6\cdot 2+0\cdot 5+7\cdot 3+(-2)\cdot 0 & 6\cdot 1+0\cdot 4+7\cdot(-2)+(-2)\cdot(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 23 & 12 \\ 33 & 33 \\ 33 & -2 \end{pmatrix}$$

Знаходження оберненої матриці

Квадратна матриця A^{-1} називається оберненою до квадратної матриці *A*, якщо виконується умова $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$, де E – одинична матриця.

Будь-яка невироджена матриця

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

має обернену матрицю $A^{-1} = \dfrac{1}{det\,A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці *A*.

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} обчислюють за формулою: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$,

де M_{ij} – мінор елемента a_{ij}.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник $(n-1)$-го порядку, отриманий з визначника *n*-го порядку викресленням *i*-го рядка і *j*-го стовпчика. Визначник $(n-1)$-го порядку отриманий з визначника *n*-го порядку викресленням *i*-го рядка і *j*-го стовпчика.

Приклад 2. Знайти матрицю обернену до матриці $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Розв'язання. Знайдемо визначник матриці *A*

$$det\,A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 = 6 \neq 0 .$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення матриці *A*:

$$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

Отже, обернена матриця A^{-1} має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійної роботи

Дано дві матриці A і B. Знайти: а) BA; б) A^{-1}; в) AA^{-1}.

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 4. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ 8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 10. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 5 & -6 & 4 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

РОЗДІЛ II. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Тема 6-7. Елементи векторної алгебри

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, який містить наступні питання теми: вектори, лінійні операції з ними, скалярний, векторний, змішаний добуток векторів та їх властивості.

План практичного заняття

1. Лінійні операції з векторами.
2. Векторний добуток векторів.

3. Скалярний і змішаний добутки векторів.

4. Застосування скалярного, векторного і змішаного добутків векторів при розв'язанні задач.

Термінологічний словник ключових понять

Вектором називається величина, яка характеризується не тільки своїм числовим значенням (довжиною), але й напрямком. Вектори позначають $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ або $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$.

Нульовим називають вектор, початок і кінець якого збігаються.

Рівними називають вектори, які мають однакову довжину та напрямки.

Колінеарними називають вектори, які розташовані на одній прямій або на паралельних прямих.

Протилежними називають колінеарні протилежно направлені вектори однакової довжини. Вектор протилежний до вектора $\vec{a}$ позначають ($-\vec{a}$).

Компланарними називають вектори, що лежать в одній площині.

Координатами вектора називаються проекції x, y, z цього вектора на осі координат:

$$x = |\vec{a}| cos\,\alpha\ ,\ \ y = |\vec{a}| cos\,\beta\ ,\ \ z = |\vec{a}| cos\,\gamma\ ,$$

де $cos\,\alpha,\ cos\,\beta, cos\,\gamma$ – напрямні косинуси вектора $\vec{a}$.

Напрямними косинусами вектора називаються косинуси кутів α, β, γ утворених цими вектором з осями координат Ox, Oy, Oz. Для напрямних косинусів виконується рівність $cos^2\,\alpha + cos^2\,\beta + cos^2\,\gamma = 1$.

Якщо вектор $\vec{a} = \overrightarrow{M_1 M_2}$, де $M_1 = (x_1; y_1; z_1)$ – початок вектора, $M_2 = (x_2; y_2; z_2)$ – кінець вектора, то координати вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$ дорівнюють різниці відповідних координат початку та кінця вектора, тобто: $\overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$.

Якщо початок вектора знаходиться в точці $M_1 = (1; 2; 5)$ а кінець – у точці $M_2 = (7; -2; 4)$, то вектор $\overrightarrow{M_1 M_2} = (7-1;\ -2-2;\ 4-5) = = (6; -4; -1)$.

Якщо $\vec{a} = (x; y; z)$, то довжина $\vec{a}$ обчислюється за формулою:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ . \qquad (1)$$

Наприклад, якщо $\vec{a} = (-6; 3; 1)$ то $|\vec{a}| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{46}$.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Дії з векторами

1. Знаходження алгебраїчної суми векторів.

Координати суми (різниці) скінченної кількості векторів дорівнюють сумі (різниці) відповідних координат цих векторів.

Якщо $\vec{a}=(3;-5;2)$ і $\vec{b}=(7;6;-1)$, то

$$\vec{a}+\vec{b}=(3+7;(-5)+6;2+(-1))=(10;1;1);$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(3-7;-5-6;2-(-1))=(-4;-11;3).$$

2. Множення вектора на число.

Координати добутку вектора на деяке число λ дорівнюють добуткам відповідних координат вектора на це число.

Якщо $\vec{a}=\left(\frac{3}{4};-5;2\right)$ і $\lambda=4$, то $\lambda\cdot\vec{a}=4\vec{a}=\left(4\cdot\frac{3}{4};4\cdot(-5);4\cdot 2\right)=$ $=(3;-20;8)$.

Знаходження скалярного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, рівне добутку довжин цих векторів на косинус кута φ між ними:

$$a\cdot b=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\,\varphi. \qquad (2)$$

Також скалярний добуток можна обчислити за формулами

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\cdot np_b a,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot np_a b. \qquad (3)$$

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані своїми координатами: $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, скалярний добуток

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2. \qquad (4)$$

Наприклад, якщо $\vec{a}=(3;1;-2)$; $\vec{b}=(0;5;4)$, то скалярний добуток векторів: $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=3\cdot 0+1\cdot 5+(-2)\cdot 4=0+5-8=-3$.

Із формули (2) косинус кута φ між векторами $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ і $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$ обчислюємо за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\,. \qquad (5)$$

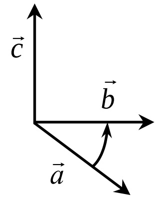
Знаходження векторного добутку двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, що задовольняє такі умови:

1) $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}\right);$

2) $\vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b};$

3) трійка $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ – права (рис. 1).



Якщо $\vec{a}=(x_1;\,y_1;\,z_1)$ і $\vec{b}=(x_2;\,y_2;\,z_2)$, то

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix} \qquad (6)$$

Рис. 1

Модуль векторного добутку чисельно дорівнює площі паралелограма (рис. 2), побудованого на цих векторах

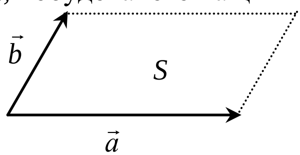


Рис. 2

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| \qquad (7)$$

Приклад 6. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=(5;\,2;\,7),\ \vec{b}=(1;\,2;\,4)$.

Розв'язання. Знайдемо векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 5 & 2 & 7\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 7\\ 2 & 4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}5 & 7\\ 1 & 4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}5 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=-6\vec{i}-14\vec{j}+8\vec{k}.$$

Знайдемо $|\vec{c}|=\sqrt{6^2+14^2+8^2}=2\sqrt{74}$ (кв. од.)

Знаходження змішаного добутку трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$

Змішаним добутком векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається число, що дорівнює скалярному добутку вектора $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$ на вектор c, тобто $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ (чи $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$).

Якщо $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$, то змішаний добуток обчислюється за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \tag{8}$$

Модуль змішаного добутку трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах $V = \left|\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}\right|$ (рис. 3).

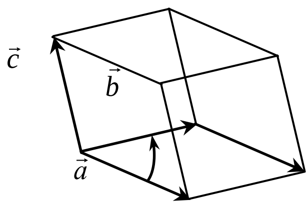


Рис. 3

Приклад 7. У просторі задано чотири точки $A(1;1;1)$, $B(4;4;4)$, $C(3;5;5)$, $D(2;4;7)$. Знайти об'єм піраміди *ABCD*.

Розв'язання. З елементарної математики відомо, що об'єм піраміди *ABCD* дорівнює одній шостій об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, а останній, у свою чергу, дорівнює модулю мішаного добутку. Отже, маємо:

$$\overrightarrow{AB} = (3;3;3),\ \overrightarrow{AC} = (2;4;4),\ \overrightarrow{AD} = (1;3;6);$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \text{ (куб. од.).}$$

Необхідна і достатня умова перпендикулярності двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \text{ або } x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0.$$

Необхідна і достатня умова паралельності двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Необхідна і достатня умова компланарності трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \text{ або } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Вектор $\vec{d}$ називається лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, якщо він дорівнює сумі добутків цих векторів на довільні дійсні числа: $\vec{d} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$.

Будь-який вектор $\vec{a}$ в просторі можна представити у вигляді лінійної комбінації трійки некомпланарних (лінійно незалежних) векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, які називаються базисом.

Завдання для самостійної роботи

Дано вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$. Знайти:

а) скалярний добуток векторів $\left(3\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$ та $\left(-\frac{1}{3}\vec{a} + 3\vec{c}\right)$;

б) площу паралелограма, побудованого на векторах $\left(2\vec{a} + \vec{b}\right)$ та $\left(-3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)$;

в) об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $3\vec{a}, 2\vec{b}, -4\vec{c}$:

г) довести, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис, знайти координати вектора $\vec{d}$ у цьому базисі, якщо:

1. $\vec{a} = (1, -3, 1)$; $\vec{b} = (-2, -4, 3)$; $\vec{c} = (0, -2, 3)$; $\vec{d} = (-8, -10, 13)$.
2. $\vec{a} = (4, 5, 1)$; $\vec{b} = (1, 3, 1)$; $\vec{c} = (-3, -6, 7)$; $\vec{d} = (19, 33, 0)$.
3. $\vec{a} = (3, -1, 2)$; $\vec{b} = (-2, 4, 1)$; $\vec{c} = (4, -5, -1)$; $\vec{d} = (-5, 11, 1)$.
4. $\vec{a} = (3, 1, 2)$; $\vec{b} = (-4, 3, -1)$; $\vec{c} = (2, 3, 4)$; $\vec{d} = (14, 14, 20)$.
5. $\vec{a} = (-2, 5, 1)$; $\vec{b} = (3, 2, -7)$; $\vec{c} = (4, -3, 2)$; $\vec{d} = (-4, 22, -13)$.
6. $\vec{a} = (1, 2, 3)$; $\vec{b} = (-5, 3, -1)$; $\vec{c} = (-6, 4, 5)$; $\vec{d} = (-4, 11, 20)$.
7. $\vec{a} = (9, 5, 3)$; $\vec{b} = (-3, 2, 1)$; $\vec{c} = (4, -7, 4)$; $\vec{d} = (-10, -13, 8)$.

8. $\vec{a}=(3,5,4)$; $\vec{b}=(-2,7,-5)$; $\vec{c}=(6,-2,1)$; $\vec{d}=(6,-9,22)$.

9. $\vec{a}=(7,2,1)$; $\vec{b}=(5,1,-2)$; $\vec{c}=(-3,4,5)$; $\vec{d}=(26,11,1)$.

10. $\vec{a}=(4,2,3)$; $\vec{b}=(-3,1,-8)$; $\vec{c}=(2,-4,5)$; $\vec{d}=(-12,14,-31)$.

Тема 8. Лінії на площині

Методичні поради до вивчення теми

Слід розглянути теоретичний матеріал з наступних питань теми: пряма лінія на площині; кут між двома площинами; умови паралельності і перпендикулярності прямих; відстань від точки до прямої; точка перетину прямих; криві II-го порядку; дослідження загального рівняння кривої II-го порядку.

План практичного заняття

1. Рівняння прямої на площині, різні форми задання.
2. Кут між двома прямими, відстань від точки до прямої.

Термінологічний словник ключових понять

Кутовий коефіцієнт – коефіцієнт при ***x*** у рівнянні прямої лінії на площині, розв'язаному відносно ***y***.

Канонічне рівняння – найпростіше рівняння кривої II-го порядку.

Ексцентриситет – відношення $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ для еліпса, гіперболи, у параболи $\varepsilon=1$.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Різновиди рівняння прямої на площині

Загальне рівняння $Ax+By+C=0.$ (1)

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом (рис. 4)

$$y=kx+b\,, \tag{2}$$

де $k=tg\alpha$, α – кут нахилу прямої до осі Ox.

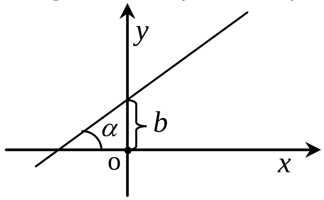


Рис. 4

Канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}, \tag{3}$$

де $M_0\left(x_0;y_0\right)$ – точка, через яку проходить пряма паралельно заданому вектору $\vec{S}\left(l;m\right)$.

Параметричне рівняння:

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \end{cases} \tag{4}$$

Рівняння прямої у відрізках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \tag{5}$$

де a,b – відрізки, які відтинає пряма від координатних осей *Ox*, *Oy* відповідно.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1\left(x_1;y_1\right)$, $M_2\left(x_2;y_2\right)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{6}$$

Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0\left(x_0;y_0\right)$ в заданому напрямку $\left(tg\alpha=k\right)$:

$$y-y_0=k\left(x-x_0\right). \tag{7}$$

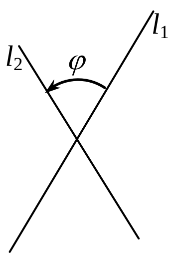
Взаємне розміщення двох прямих

Прямі $l_1: y=k_1x+b_1$, $l_2: y=k_2x+b_2$

– перетинаються $\Leftrightarrow$ $k_1\neq k_2$, кут φ між цими прямими (рис. 5) знаходиться за формулою $tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$;

– паралельні $\Leftrightarrow$ $k_1=k_2, b_1\neq b_2$;

– співпадають $\Leftrightarrow$ $k_1=k_2, b_1=b_2$;



– перпендикулярні $\Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$.

Рис. 5

Точка перетину прямих

Якщо дві прямі задані загальними рівняннями $Ax_1 + By_1 + C_1 = 0$, $Ax_2 + By_2 + C_2 = 0$, то координати їх точки перетину можуть бути знайдені із системи рівнянь:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Відстань від точки до прямої

Відстань d від заданої точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ знаходиться за формулою (8):

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (8)$$

Приклад 8. Дано дві вершини трикутника $A(2; -3)$, $B(5; 1)$, рівняння сторони $BC: x + 2y - 7 = 0$ і медіани $AM: 5x - y - 13 = 0$. Скласти рівняння висоти, опущеної з вершини С, обчислити її довжину, знайти кут трикутника при вершині *A*.

Нехай вершина трикутника $C(x_1; y_1)$. Тоді точка з координатами $x_2 = \dfrac{5 + x_1}{2}$; $y_2 = \dfrac{1 + y_1}{2}$ лежить на медіані, тобто виконується рівність $5\left(\dfrac{5 + x_1}{2}\right) - \dfrac{1 + y_1}{2} - 13 = 0$. Крім того, точка *C* лежить на прямій *BC*. Отже, маємо систему рівнянь для знаходження координат $(x_1; y_1)$:

$$\begin{cases} 5x_1 - y_1 - 2 = 0 \\ x_1 + 2y_1 - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 3 \end{cases}$$

Знайдемо рівняння прямих *AB* і *AC*, використовуючи рівняння прямої, маємо:

$$AB: \frac{y + 3}{1 + 3} = \frac{x - 2}{5 - 2} \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{17}{3};$$

$$AC: \frac{y + 3}{3 + 3} = \frac{x - 2}{1 - 2} \Rightarrow y = -6x + 9.$$

Висота проходить через точку С перпендикулярно до прямої *АВ*. Використаємо умову перпендикулярності двох прямих і знайдемо кутовий коефіцієнт висоти $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{3}{4}$.

Знайдемо рівняння висоти: $y - 3 = -\frac{3}{4}(x-1) \Rightarrow 3x + 4y - 15 = 0.$

Довжину висоти знайдемо як відстань від точки $C(1;3)$ до прямої *АВ:*

$$h = \frac{|4\cdot 1 - 3\cdot 3 - 17|}{\sqrt{16+9}} = \frac{22}{5} = 4{,}4\,.$$

Щоб обчислити кут *А,* скористаємось формулою для знаходження кута між двома прямими: $tg\hat{A} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-6 - \frac{4}{3}}{1 - 6\cdot\frac{4}{3}} = \frac{22}{21}$; $\hat{A} = arctg\,\frac{22}{21}$.

Приклад 9. Знайти відстань між паралельними прямими $2x - y + 3 = 0$ та $2x - y - 5 = 0.$

Розв'язання. Відстань *d* між паралельними прямими можна розглядати як відстань від точки, що належить одній із цих прямих, до іншої прямої.

Знайдемо координати однієї із точок *М*, що належить прямій $2x - y + 3 = 0$. Нехай $x=1$, тоді $y=5$. Відстань від точки $M(1;5)$ до прямої $2x - y - 5 = 0$ дорівнює: $d = \frac{|2\cdot 1 - 5 - 5|}{\sqrt{x^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}}\,(лін.\,од.).$

Завдання для самостійної роботи

Задані координати вершин трикутника АВС. Знайти:

а) рівняння сторін трикутника та їх довжини;

б) рівняння висоти АН, проведеної із вершини *А* трикутника та її довжину;

в) рівняння медіани СМ, проведеної з вершини *С*;

г) рівняння прямої, що проходить через вершину *С* паралельно до сторони АВ;

д) внутрішній кут *В* трикутника АВС;

е) площу трикутника АВС, якщо:

1. $A(4;-3)$; $B(-1;4)$; $C(5;6)$.

2. $A(4;3)$; $B(6;-1)$; $C(2;4)$.

3. $A(4;7)$; $B(0;4)$; $C(3;0)$.

4. $A(4;-4)$; $B(-1;0)$; $C(5;6)$.

5. $A(4;3)$; $B(5;-1)$; $C(2;8)$.

6. $A(2;4)$; $B(0;1)$; $C(3;-1)$.

7. $A(2;2)$; $B(0;-1)$; $C(3;1)$.

8. $A(3;0)$; $B(5;4)$; $C(-1;2)$.

9. $A(2;0)$; $B(7;5)$; $C(3;7)$.

10. $A(3;2)$; $B(4;3)$; $C(-1;6)$.

Тема 10. Елементи аналітичної геометрії в просторі

Методичні поради до вивчення теми

Слід розглянути теоретичний матеріал з наступних питань теми: рівняння площини; кут між площинами, відстань від точки до площини; рівняння прямої у просторі; взаємне розміщення прямої і площини у просторі.

Термінологічний словник ключових понять

Нормальний вектор площини – вектор $\overrightarrow{N} = (A, B, C)$, перпендикулярний до площини.

Напрямний вектор прямої – вектор $\vec{s} = (m, n, p)$ колінеарний прямій у просторі.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання
Площина

У декартовій прямокутній системі координат $Oxyz$ площина визначається лінійним рівнянням виду:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

де числа *A, B, C* одночасно не дорівнюють нулю.

Будь-який перпендикулярний до площини вектор $\vec{n}(A;B;C)$ називається нормальним вектором площини (рис. 10).

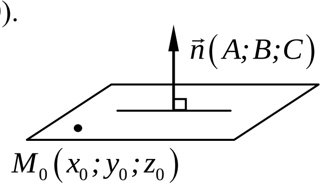


Рис. 10

Рівняння площини за даною точкою $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і заданим ненульовим нормальним вектором $\vec{n}(A;B;C)$ має вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{2}$$

Приклад 13. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $P(1;2;-1)$ і перпендикулярна до вектора $\vec{n}(2;3;1)$.

Розв'язання. Шукане рівняння має вигляд: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+$ $+C(z-z_0)=0.$ Використовуючи формулу (2) та умову задачі, маємо: $2(x-1)+3(y-2)+1(z+1)=0$ або $2x+3y+z-7=0$.

Рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, які не лежать на одній прямій:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (3)$$

Рівняння площини у «відрізках» на осях (рис. 11):

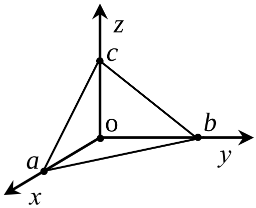


Рис. 11

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad (4)$$

де $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$ – відрізки, які відтинаються площиною по осях координат *Ox, Oy, Oz,* відповідно.

Кут між двома площинами (рис. 12).

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

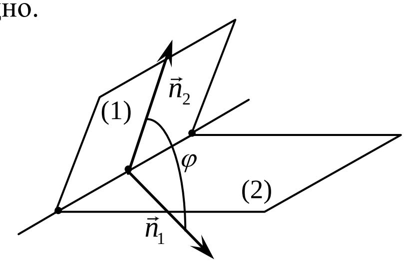


Рис. 12

$$cos\,\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (5)$$

Взаємне розміщення двох площин

1. Умова паралельності: $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$. (6)

2. Умова перпендикулярності: $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$. (7)

Площини збігаються, якщо $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$.

Приклад 14. Записати рівняння площин, що проходять:
1) паралельно площині *Oxz* і через точку $(2;-5;3)$;

2) через вісь Oz і точку $(-3;1;-2)$;

3) паралельно осі Ox і через точки $(4;0;-2)$ i $(5;1;7)$.

Розв'язання. 1. Рівняння шуканої площини $By+D=0$ або $y=\dfrac{-D}{B}$. Точка $(2;-5;3)$ лежить у площині, тобто задовольняє останнє рівняння: $-5=\dfrac{-D}{B}$; остаточно маємо: $y=-5$, або $y+5=0$.

2. Рівняння шуканої площини $Ax+By=0$ або $x+\left(\dfrac{B}{A}\right)y=0$. Підставимо координати точки $(-3;1;-2)$ у це рівняння $-3+\dfrac{B}{A}=0$, $\dfrac{B}{A}=3$.

Остаточне рівняння шуканої площини набуває вигляду $x+3y=0$.

3. Рівняння площини, паралельної осі OX, має вигляд: $By+Cz+D=0$.

Підставляючи в нього почергово координати точок $(4;0;-2)$ i $(5;1;7)$, отримаємо систему:

$$\begin{cases} -2C+D=0 \\ B+7C+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{D}{C}=2 \\ \dfrac{B}{C}+\dfrac{D}{C}=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{D}{C}=2 \\ \dfrac{B}{C}=-9 \end{cases}$$

Отже, шукане рівняння має вигляд $9y-z-2=0$.

Відстань від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до площини (рис. 13):

$$Ax+By+Cz+D=0:$$

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (8)$$

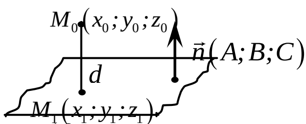


Рис. 13

Приклад 15. Визначити відстань від точки $C(2;-3;2)$ до площини, яка проходить через точки $M_1(-3;0;1)$; $M_2(0;2;3)$; $M_3(3;1;-1)$.

Розв'язання. Напишемо рівняння площини, що проходить через три точки M_1, M_2, M_3.

Воно має вигляд: $\begin{vmatrix} x+3 & y & z-1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$.

Розкривши визначник, отримаємо: $2x-6y+3z+3=0$.

Знайдемо відстань від точки C до шуканої площини за формулою:

$$d=\frac{\left|2\cdot 2-6\cdot(-3)+3\cdot 2+3\right|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}}=\frac{31}{7}.$$

Пряма в просторі

Канонічне рівняння прямої в просторі (рис. 14):

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}, \qquad (9)$$

де $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – задана точка прямої L;

$\vec{S}(l;m;n)$ – напрямний вектор прямої L.

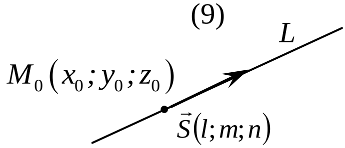


Рис. 14

Параметричне рівняння прямої, що проходить через точку M_0 в напрямку вектора $\vec{S}(l;m;n)$:

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases} \qquad (10)$$

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (11)$$

Пряма як перетин двох площин $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (12)$$

Приклад 16. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $P(1;2;-1)$ і перпендикулярна до векторів $\vec{n}_1(1;2;-3)$ і $\vec{n}_2(2;-1;2)$.

Розв'язання. Напрямний вектор $\vec{S}$ прямої перпендикулярний векторам $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$, можна знайти за формулою:

$$\vec{S}=\left[\vec{n}_1\times\vec{n}_2\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}-8\vec{j}-5\vec{k},\ \vec{S}\left(1;-8;-5\right).$$

Шукане канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку P і має напрямний вектор $\vec{S}$, набуває вигляду: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-8}=\dfrac{z+1}{-5}$.

Кут між двома прямими

$\left(L_1\right):\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ і $\left(L_2\right):\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_1}{n_2}$ у просторі:

$$cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \qquad (13)$$

Умова паралельності та перпендикулярності двох прямих у просторі

1) $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$ – умова перпендикулярності.

2) $\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$ – умова паралельності.

Якщо прямі не паралельні і не збігаються, то вони або перетинаються, або є мимобіжними (рис. 15).

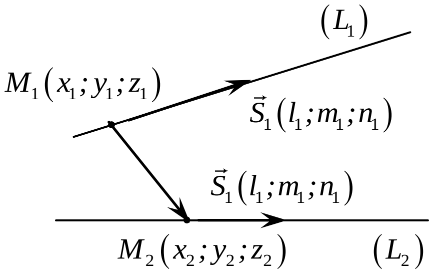


Рис. 15

У кожному з цих випадків повинні виконуватись дві умови:
Якщо прямі перетинаються, то

1) $\dfrac{l_1}{l_2}\neq\dfrac{m_1}{m_2}\neq\dfrac{n_1}{n_2}$ (напрямні вектори прямих неколінеарні);

2) вектори $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{S}_1, \vec{S}_2$ – компланарні, а отже, їх змішаний добуток дорівнює нулю, тобто $\overrightarrow{M_1M_2}\vec{S}_1\vec{S}_2 = 0$.

Якщо прямі мимобіжні, то:

1) $\frac{l_1}{l_2} \neq \frac{m_1}{m_2} \neq \frac{n_1}{n_2}$ і 2) $\overrightarrow{M_1M_2}\vec{S}_1\vec{S}_2 \neq 0$.

Відстань від точки до прямої у просторі

Відстань d від точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до прямої L (13), дорівнює висоті паралелограма побудованого на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ і $\vec{S}$ (рис. 16) і може бути обчислена за формулою:

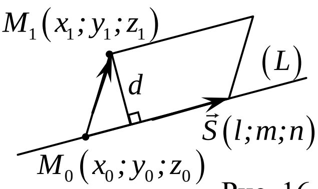


Рис. 16

$$d = \frac{S_{пар}}{\left|\vec{S}\right|} = \frac{\left|\left[\vec{S} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right]\right|}{\left|\vec{S}\right|} \qquad (14)$$

Взаємне розміщення прямої і площини

Кут (рис. 17) між площиною $Ax + By + Cz + D = 0$ і прямою $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ можна розглядати як

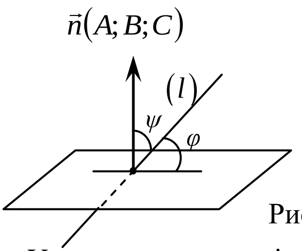


Рис. 17

$$sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \quad (15)$$

Умова паралельності та перпендикулярності прямої (9) і площини (1):

1) $Al + Bm + Cn = 0$ – умова паралельності;

2) $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$ – умова перпендикулярності.

Якщо $Al + Bm + Cn \neq 0$, то пряма (9) перетинає площину (1) в точці, координати якої визначаються за системою:

$$
\begin{cases}
x = x_0 - l \cdot \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn} \\
y = y_0 - m \cdot \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn} \\
z = z_0 - n \cdot \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}
\end{cases}
\qquad (16)
$$

Якщо $Al + Bm + Cn = 0$ і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то пряма (9) розміщена в площині (1).

Завдання для самостійної роботи

1. Дано чотири точки A_1, A_2, A_3, A_4. Скласти рівняння: 1) площини $A_1A_2A_3;$ 2) прямої $A_1A_2;$ 3) прямої $A_1M,$ яка перпендикулярна до площини $A_1A_2A_3;$ 4) прямої $A_3N,$ яка паралельна до прямої $A_1A_2;$ 5) площини, що проходить через точку A_4 перпендикулярно до прямої $A_1A_2;$ 6) знайти об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4;$ зробити малюнок; 7) обчислити синус кута між прямою A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

1. $A_1(2;4;3);\ A_2(1;1;5);\ A_3(4;9;3);\ A_4(3;6;7).$
2. $A_1(4;2;5);\ A_2(0;7;1);\ A_3(0;2;7);\ A_4(1;5;0).$
3. $A_1(6;8;2);\ A_2(5;4;7);\ A_3(2;4;7);\ A_4(7;3;7).$
4. $A_1(7;5;3);\ A_2(9;4;4);\ A_3(4;5;7);\ A_4(7;9;6).$
5. $A_1(6;1;1);\ A_2(4;6;6);\ A_3(4;2;0);\ A_4(1;2;6).$
6. $A_1(5;5;4);\ A_2(1;-1;4);\ A_3(3;5;1);\ A_4(5;8;-1).$
7. $A_1(0;7;1);\ A_2(2;-1;5);\ A_3(1;6;3);\ A_4(3;-9;8).$
8. $A_1(9;5;5);\ A_2(-3;7;1);\ A_3(5;7;8);\ A_4(6;9;2).$
9. $A_1(3;5;4);\ A_2(5;8;3);\ A_3(1;2;-2);\ A_4(-1;0;2).$
10. $A_1(4;4;10);\ A_2(7;10;2);\ A_3(2;8;4);\ A_4(9;6;9).$

2. Пряма задана загальним рівнянням. Записати рівняння прямої у канонічному та параметричному вигляді.

1. $\begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x - y + 3z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0 \\ x-2y+z+3=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x-y+z-4=0 \\ 3x-y-2z+5=0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x+y+z-2=0 \\ 2x-y-3z+6=0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x-3y+2z+2=0 \\ x+3y+z+14=0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x+y-z-6=0 \\ 3x-y+2z=0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 6x-5y-4z+8=0 \\ 6x+5y+3z+4=0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x+y+2z+4=0 \\ x-y-3z+2=0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x+4y+3z+1=0 \\ 2x-4y-2z+4=0 \end{cases}$

Тема 11. Лінії другого порядку

Методичні поради до вивчення теми

Слід розглянути теоретичний матеріал з наступних питань теми: коло, парабола, еліпс, гіпербола.

Термінологічний словник ключових понять

Колом називається множина всіх точок площини, рівновіддалених від даної точки (центра).

Еліпсом (рис. 7) називається геометричне місце точок площини, сума відстаней від кожної з яких до двох даних точок F_1 і F_2 (фокусів) є величина стала і рівна $2a$, тобто $r_1+r_2=2a$, де r_1, r_2 – фокальні радіус-вектори довільної точки $M\left(x;y\right)$ еліпса, a і b – півосі еліпса.

Гіперболою (рис. 8) називається геометричне місце точок площини, для яких абсолютна величина різниці відстаней до двох даних точок F_1 і F_2 (фокусів) є величиною сталою і рівною $2a$, тобто $\left|r_1-r_2\right|=2a$, де r_1 і r_2 – фокальні радіус-вектори довільної точки $M\left(x;y\right)$ гіперболи.

Параболою (рис. 9) називається геометричне місце точок площини, однаково віддалених від однієї точки F (фокуса) і даної прямої (директриси).

Практичні завдання та методичні рекомендації до їх виконання

Загальне рівняння кривих другого порядку має вигляд:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

де *A, B, C* одночасно не дорівнюють нулю, тобто $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

До ліній другого порядку відносяться коло, еліпс, гіпербола, парабола.

Коло

Якщо R – радіус кола, а точка $C(x_0; y_0)$ – центр кола (рис. 6), то її канонічне рівняння має вигляд:

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

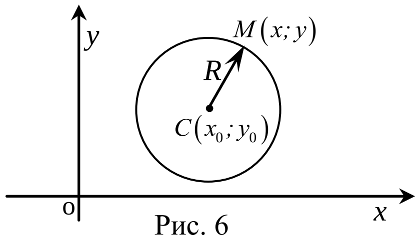


Рис. 6

У частинному випадку, рівняння кола з центром в початку координат $(x_0=y_0=0)$ має вигляд $x^2+y^2=R^2$.

Еліпс

Канонічне рівняння еліпса з центром в точці $C(x_0; y_0)$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

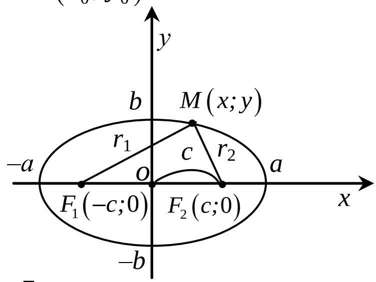


Рис 7.

У частинному випадку, якщо центр симетрії знаходиться в початку координат (рис. 7), то $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \ (a>b)$.

$F_1(-c;0), F_2(c;0)$ – фокуси еліпса, де $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

Відношення $\varepsilon=\frac{c}{a}$ $(0\le\varepsilon\le1)$ називається *ексцентриситетом* еліпса. Ексцентриситет характеризує форму еліпса.

Фокальні радіус-вектори: $r_1=a+\frac{c}{a}x$, $r_2=a-\frac{c}{a}x$.

Гіпербола

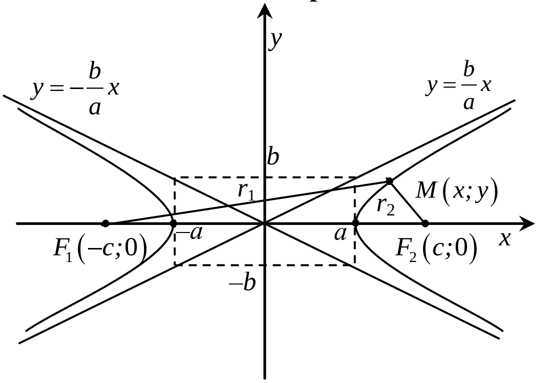


Рис. 8

Канонічне рівняння гіперболи з центром в точці $C(x_0;y_0)$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

У частинному випадку, якщо $C(0;0)$ – початок координат, то $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ (a>b)$,

де a – дійсна; b – уявна півосі; $c=\sqrt{a^2+b^2}$ – напівфокусна відстань;

$F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – фокуси гіперболи. Число $\varepsilon=\frac{c}{a}$ ($\varepsilon>1$) називається ексцентриситетом гіперболи.

Фокальні радіус-вектори гіперболи: $r_1=a+\frac{c}{a}x$, $r_2=\frac{c}{a}x-a$.

Рівняння асимптот гіперболи: $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Приклад 10. Записати рівняння гіперболи, яка проходить через точку $A(6;9)$, якщо:

1) відстань між фокусами дорівнює 8, а відстань між директрисами – 6;

2) директриси задано рівняннями $x=-3\sqrt{2}, x=3\sqrt{2}$, а кут між асимптотами – прямий;

3) ексцентриситет дорівнює $\varepsilon=2$, а уявна піввісь $b=3$;

4) асимптоти задано рівнянням $y=\pm\frac{5}{3}x$.

Розв'язання. 1) Координати фокусів $F_1(-c;\ 0);\ F_2(c;\ 0)$, тому з умови $2c=8;\ c=4$, відстань між директрисами $6=\frac{2a}{\varepsilon}$. Звідки, враховуючи, що $e=\frac{c}{a}$, маємо: $a=12,\ b=c-a=4$. Остаточно $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$.

2) З рівнянь директрис маємо: $\frac{a}{\varepsilon}=3\sqrt{2}$, якщо кут між асимптотами прямий, то $a=b$. Отже, враховуючи формулу $\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$, маємо $\varepsilon=\sqrt{2}$ і $a=6;\ b=6$. Остаточно записуємо рівняння шуканої гіперболи: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{36}=1$.

3) З формули маємо: $\frac{3}{a}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$, звідки $a=\sqrt{3}$. Отже, $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$.

4) Точка A належить гіперболі, тому маємо: $\frac{36}{a^2}-\frac{81}{b^2}=1$. З рівняння асимптот гіперболи випливає співвідношення $\frac{b}{a}=\frac{5}{3},\quad \Rightarrow b=\frac{5}{3}a$. Підставивши b в останнє співвідношення, маємо рівняння для знаходження a^2:

$$\frac{36}{a^2}-\frac{81\cdot 9}{25a^2}=1;\ a^2=\frac{171}{25};\ b^2=19.\ \text{Отже,}\ \frac{25x^2}{171}-\frac{y^2}{19}=1.$$

Парабола

Канонічне рівняння параболи з вершиною в точці $C(x_0;y_0)$ (вітки напрямлені вправо): $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$.

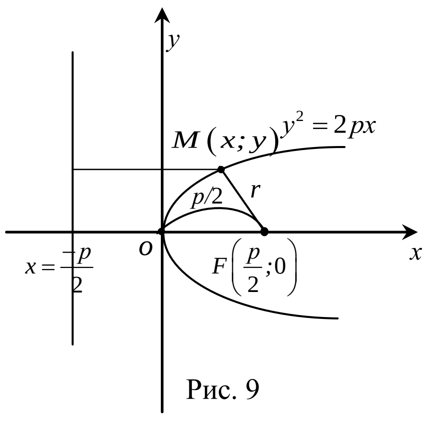


Рис. 9

У частинному випадку, якщо вершина знаходиться в початку координат $C(0;0)$, то рівняння має вигляд: $y^2 = 2px$.

Інші види канонічних рівнянь параболи:

$(y-y_0)^2 = -2p(x-x_0)$ – вітки напрямлені вліво;

$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$ – вітки напрямлені вгору;

$(x-x_0)^2 = -2p(y-y_0)$ – вітки напрямлені вниз.

Для параболи ексцентриситет дорівнює 1.

Приклад 11. Знайти геометричне місце точок, однаково віддалених від точки $A(2;0)$ і прямої $x+1=0$.

Розв'язання. Нехай точка $M(x,y)$ така, що $|AM| = d$, де d – відстань від точки M до прямої $x+1=0$.

Оскільки $|AM| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$, а $d = \frac{|x+1|}{\sqrt{1}} = |x+1|$, то маємо рівняння: $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = |x+1|;$ $(x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2;$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - x^2 - 2x - 1 = 0;$$

$$y^2 - 6x + 3 = 0; \quad y^2 = 6x + 3.$$

$y^2 = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)$, яке визначає на площині параболу.

Приклад 12. Визначити тип кривої $2x^2 - 4x + y^2 - 6y - 5 = 0$, записавши її канонічне рівняння.

Розв'язання. Об'єднаємо члени рівняння, які містять x та y окремо; одержимо: $(2x^2 - 4x) + (y^2 - 6y) - 5 = 0$.

Виділимо повні квадрати: $2(x^2 - 2x) + (y^2 - 6y) - 5 = 0;$

$$2\left[(x-1)^2 - 1\right] + (y-3)^2 - 9 - 5 = 0;$$

$$2(x-1)^2 - 2 + (y-3)^2 - 9 - 5 = 0;$$

$$2(x-1)^2 + (y-3)^2 = 16;$$

$$\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(y-3)^2}{16}=1 \Rightarrow \frac{(x')^2}{8}+\frac{(y')^2}{16}=1.$$

Це канонічне рівняння еліпса в системі координат, початок якої знаходиться в точці $O'(1;3)$.

Завдання для самостійної роботи

Визначити вид кривої, знайти її параметри та побудувати її.

1. а) $2y^2-8y+9x-6=0;$
б) $9x^2-25y^2-18x-100-316=0;$
в) $2x^2+4y^2+4x-2y-18=0;$
г) $2x^2+2y^2-20x+4y-18=0.$

2. а) $2x^2+5y^2+8x-10y-17=0;$
б) $3x^2-5y+9x-6=0;$
в) $x^2-4y^2-6x-8y-11=0;$
г) $3x^2+3y^2-6x+36y-18=0.$

3. а) $3x^2-5y^2+12x-10y-23=0;$
б) $2x^2+y^2+24x-6y+5=0;$
в) $y^2+4y-2x+6=0;$
г) $30x-x^2-y^2+6y-28=0.$

4. а) $5x^2-6y^2-10x-12y-10=0;$
б) $x^2+y^2-6x+90y-18=0.$
в) $3x^2-5y+18x-6=0;$
г) $3x^2+3y^2+6x+30y-24=0.$

5. а) $x^2-4y^2-6x-8y-11=0;$
б) $2y^2+30y-x+2=0;;$
в) $4x^2-5y^2+16x-40y-10=0;$
г) $y^2-20y+2x+6=0;$
д) $4x^2+4y^2-12x+24y-16=0;$

6. а) $x^2+5y^2+4x-25=0;$
б) $2x^2+3y^2-4x+6y-29=0;$
в) $2x^2+3y^2+4x-6y-28=0.$
г) $3x^2+3y^2-6x+9y-18=0.$
д) $3x^2+y^2+6x-2y-22=0.$

РОЗДІЛ III. ФУНКЦІЯ

Тема 12. Границі функції

Методичні поради до вивчення теми

Слід розглянути теоретичний матеріал з наступних питань теми: поняття границі функції, розкриття невизначеностей, I-ша та II-га чудові границі, неперервність функцій та їх властивості, класифікація точок розриву.

План практичних занять

1. Границі послідовностей.
2. Границя дробово-раціональної функції, коли х прямує до x_0.
3. Границя відношення многочленів, коли х прямує до нескінченності.
4. Знаходження границь функцій, що містять ірраціональності.

Техніка обчислень границь із застосуванням I стандартної границі, II стандартної границі.

Термінологічний словник ключових понять

Функція – це така відповідність між множинами *D* та *E,* при якій кожному значенню змінної $x \in D$ відповідає одне й тільки одне значення $y \in E$.

Область визначення функції – це множина всіх значень аргументу, для яких можна обчислити значення функції.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена у деякому околі точки $x = a$, за винятком, хіба що, самої точки $x = a$.

Означення. Число b називається границею функції $f(x)$ при $x \to a$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке що при $\left|[x - a\right| < \delta$ виконується нерівність $\left|f(x) - b\right| < \varepsilon$.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Розкриття невизначених виразів типу $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty - \infty]$ для алгебраїчних функцій

При виконанні граничного переходу у виразах типу $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, коли порушуються умови теореми про граничний перехід при арифметичних операціях, розв’язання задачі у ряді випадків зводиться до аналізу невизначених виразів виду $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [\infty - \infty]$.

Невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ для раціональних функцій

Многочлен $P_n(x)$ називається упорядкованим, якщо

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n .$$

Теорема Безу. Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен типу $x - a$ дорівнює значенню многочлена при $x = a$, тобто $P_n(a)$.

Наслідок. Якщо число a – корінь многочлена $P_n(x)$, тобто $P_n(a) = 0$, то многочлен $P_n(x)$ ділиться без остачі на двочлен $x - a$.

Наприклад: $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+6x-5}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2-x+5\right)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+5}{x+1}=\frac{1-1+5}{1+1}=\frac{5}{2}.$$

Невизначеність $\left[\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right]$ для ірраціональних функцій

Для розв'язку задач у цьому випадку рекомендується звільнитись від тих ірраціональних множників у чисельнику і знаменнику дробового виразу, які перетворюються на нуль при виконанні граничного переходу. Для звільнення від радикалів використовують формули скороченого множення, заміну змінної та інші штучні прийоми.

Наприклад: $$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-1-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}.$$

Невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

У цьому випадку і чисельник, і знаменник рекомендується поділити на найбільший степінь змінної, що входить як до знаменника, так і до чисельника.

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x}+x+1}{2\sqrt{x^3+x}-10x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x\sqrt{x}+x+1}{x\sqrt{x}}}{\frac{2\sqrt{x^3+x}-10x}{x\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{10}{\sqrt{x}}}=\frac{1}{2}.$$

Невизначеність $[\infty-\infty]$

Цей тип невизначеності зводиться до невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, наприклад, зведенням виразу до спільного знаменника, множенням на спряжений вираз.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to1}\frac{1+x-2}{1-x^2}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{1-x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{x+1}=-\frac{1}{2}.$$

Перша та друга визначні границі

Перша визначна границя: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1$.

Приклад 17. Знайти $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x}{\sin3x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x}{\sin3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin5x}{5x}\cdot5x}{\frac{\sin3x}{3x}\cdot3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{5x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin5x}{5x}}{\frac{\sin3x}{3x}}=\frac{5}{3}$.

Друга визначна границя: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{a\to0}(1+a)^{\frac{1}{a}}=\left[1^\infty\right]=e\approx2{,}71828$.

Приклад 18. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-2}\right)^{3x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-2}\right)^{3x}=\left[1^\infty\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+1}{2x-2}-1\right)^{3x}=$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-2}\right)^{3x\cdot\frac{2x-2}{3}\cdot\frac{3}{2x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{2x-2}}=e^{\frac{3}{2}}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{4x^2-25x+25}{2x^2-15x+25}$ при а) $x_0=2$; б) $x_0=5$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{6x^2+13x+7}{3x^2+8x+5}$ при а) $x_0=-2$; б) $x_0=-1$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{3x^2+5x-8}{2x^2+3x-5}$ при а) $x_0=-2;$ б) $x_0=1;$

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{2x^2+15x+25}{x^2+5x+50}$ при а) $x_0=5;$ б) $x_0=-5;$

5) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{7x^2-26x-8}{2x^2+x-28}$ при а) $x_0=1;$ б) $x_0=-4;$

6) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{3x^2-14x+8}{2x^2-7x-4}$ при а) $x_0=2;$ б) $x_0=4;$

7) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{3x^2+11x+10}{2x^2+5x+2}$ при а) $x_0=-3;$ б) $x_0=-2;$

8) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$ при а) $x_0=3;$ б) $x_0=-3;$

9) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{4x^2-7x-2}{2x^2-x-6}$ при а) $x_0=0;$ б) $x_0=2;$

10) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$ при а) $x_0=2;$ б) $x_0=3;$

2. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4};$ 2) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{6-x}};$

3) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{9-x}}{x-5};$ 4) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3-x}}{x+2};$

5) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{8-x}}{x-2};$ 6) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x-3};$

7) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{\sqrt{x-3}-\sqrt{9-x}}{x-6};$ 8) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}};$

9) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}};$ 10) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}};$

3. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x \to o} \dfrac{\left(1-\cos^2 2x\right)}{3x};$ 2) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{2n-3}{2n+5}\right)^{3n+2}.$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \sin 4x \cdot tg 5x;$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{3n-4}\right)^{2n-7}.$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg 2x}{\sin 5x};$ 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-6}{n-4}\right)^{4n+2}.$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg 2x}{\sin 5x};$ 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n-3}{5n+6}\right)^{n-3}.$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \sin 5x \cdot ctg 6x;$ 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n+1}{4n-3}\right)^{5n-1}.$

11) $\lim\limits_{x\to 0} \sin 8x \cdot ctg 5x;$ 12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n-5}{4n-3}\right)^{3n+5}.$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg 2x};$ 14) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-4}{n+5}\right)^{5n+3}.$

15) $\lim\limits_{x\to 0} \sin 5x \cdot tg 3x;$ 16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-5}{2n+3}\right)^{4n-5}.$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{tg 9x};$ 18) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+6}\right)^{2n+3}.$

19) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{tg 9x};$ 20) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n-3}{5n+4}\right)^{n+4}.$

РОЗДІЛ IV.ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Тема 13. Похідна функції однієї змінної

Методичні поради до вивчення теми

Слід розглянути теоретичний матеріал з наступних питань теми: означення похідної; геометричний зміст похідної; економічний зміст похідної; залежність між неперервністю і диференційованістю функції; основні правила диференціювання; таблиця похідних елементарних функцій; похідні вищих порядків; диференціал функції.

План практичних занять

1. Знаходження похідних функцій за означенням.
2. Рівняння дотичної та нормалі до плоскої фігури.
3. Похідна складної функції.
4. Похідні вищих порядків.

Термінологічний словник ключових понять

Геометричний зміст похідної – похідна *f '(x)* чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції *y = f(x)* у точці з абсцисою х.

Диференціал функції однієї змінної – це добуток *f ' (x)Δx.*

Похідною функції $y = f\left(x\right)$ у точці x_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}.$$

Позначення похідної: $y',\ f'\left(x\right),\ \dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{df\left(x\right)}{dx}$.

Знаходження похідної функції називається диференціюванням цієї функції. Якщо функція в точці *x* має скінченну похідну, то функція називається диференційованою в цій точці.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Основні правила диференціювання

1. $C' = 0,\ C = const$.
2. $x' = 1$.

3. $(U \pm V)' = U' \pm V'$.

4. $(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$.

5. $\left(\dfrac{U}{V}\right) = \dfrac{U'V - UV'}{V^2}$, $V \neq 0$.

Похідні основних елементарних функцій

1. $x' = 1$.
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$.
3. $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.
4. $\left(e^x\right)' = e^x$.
5. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$.
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.
8. $(\sin x)' = \cos x$.
9. $(\cos x)' = -\sin x$.
10. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
11. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
14. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
15. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Похідна складної (складеної) функції та неявно заданої функції

Якщо $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ диференційовані функції своїх аргументів, то похідна функції від функції (або складеної функції) $y = f(\varphi(x))$ існує і дорівнює добутку похідної даної функції y по проміжному аргументу і похідній проміжного аргументу u по незалежній змінній x:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Приклад 19. Знайти похідну функції $y = \sin^3 5x$.

Розв'язання. $y' = 3 \cdot \sin^2 5x \cdot \cos 5x \cdot 5 = 15 \sin^2 5x \cdot \cos 5x$.

Нехай маємо неявно задану функцію $F(x;y)=0$. Для знаходження похідної функції заданої неявно, потрібно продиференціювати обидві частини рівняння, розглядаючи y як функцію від x, потім із отриманого рівняння знайти y'.

Приклад 20. Знайти похідну неявно заданої функції $x^3 - 2xy + ln\,y + sin\,y^2 = 10$.

Розв'язання. $3x^2 - \left(2y + 2x \cdot y'\right) + \frac{1}{y} \cdot y' + cos\,y^2 \cdot 2y \cdot y' = 0;$

$$y'\left(-2x + \frac{1}{y} + 2y \cdot cos\,y^2\right) = 2y - 3x^2; \qquad y' = \frac{2y - 3x^2}{-2x + \frac{1}{y} + 2y \cdot cos\,y^2}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти похідні функцій:

1) $y = 2x^5 + \frac{1}{x} + 3\sqrt{x};$ 2) $y = \frac{3}{x} - 4x^3 + \frac{2}{x^4};$

3) $y = 3x^8 - x^4 + \frac{2}{x};$ 4) $y = 7\sqrt{x} - 3x^3 + \frac{4}{x};$

5) $y = 7x + \frac{5}{x^2} + x^6 - 1;$ 6) $y = 5x^2 - ln\,x + x^5 - \frac{5}{x};$

7) $y = 3x^5 - \frac{3}{x} - ln\,x + \frac{10}{x^5};$ 8) $y = e^x + \frac{3}{x} - 4x^6 + \frac{4}{x^5};$

9) $y = 8x^4 + 2x^2 - \frac{4}{x} - ln\,x;$ 10) $y = 4x^6 + \frac{5}{x} - sin\,x - \frac{7}{x^4};$

11) $y = \frac{2x^2 - x}{sin\,2x};$ 12) $y = \frac{2x^3 - x^2}{x^5 - 6x + 2};$

13) $y = \frac{5x^3 - 8x + 2}{cos\,2x};$ 14) $y = \frac{cos\,3x}{8x^4 - 2x + 3};$

15) $y = \frac{ln\,x + cos\,2x}{4x^5};$ 16) $y = \frac{2x^2 - 8x + 1}{sin^2\,x};$

17) $y = \frac{4x^5 + 3}{ln\,x};$ 18) $y = \frac{6x^2 - 3x^5 + 4x}{sin^2\,x};$

19) $y = \frac{ln\,2x}{sin\,3x};$ 20) $y = \frac{9x^5 - 2x + 3}{5x^2 + 2x^3 + 6}.$

2. Знайти похідні функцій, що задані неявно:

а) $y^2x + 4x^4 - 3y^4x^2 + 3y - 1 = 0;$ б) $3y^2x^5 - 3y^5x^2 + 3y + 2x^5 - 1 = 0;$

а) $5y^2x^3+4y^4-3y^4x^2+3y^3-1=0;$ б) $y^2+4x^4-3y^4x^2+12y-1=0;$

а) $7y^5x^2+3x^5-3y^6x^2+4y-x=0;$ б) $2y^2x^7+4x^4-3y^3x^2+3x^6y-y=0$.

а) $x^2+6x^3-5y^2x^2+3y^2-1=0;$ б) $3y^2x^5+4x^2-3y^5x^2+3y-1=0;$

а) $4y^3x+5y-3y^4x^2+3y^3-8=0;$ б) $yx^5+2y^2-3x^2+3y-9x^4-1=0.$

3. Знайти похідну функції:

1) $y=sin^3 2x\cdot cos 8x;$ 2) $y=tg^3 2x\cdot cos 3x;$

3) $y=sin 8x\cdot\left(8x^2+2x\right);$ 4) $y=sin x\cdot cos^3 8x;$

5) $y=arcsin 2x\cdot cos x;$ 6) $y=ctg 3x\cdot\left(3x^2+6x-4\right);$

7) $y=tg 3x\cdot cos 7x;$ 8) $y=ln x\cdot ctg 5x;$

9) $y=sin 2x\cdot e^x;$ 10) $y=sin^5 x\cdot\left(3x^3-4x^4+2x\right);$

Похідні вищих порядків

Похідна $f'(x)$ від функції $f(x)$ сама є функцією, що також може мати похідну. Тому, якщо $f'(x)$ – це похідна першого порядку, $\left(f'(x)\right)'=f''(x)$ – похідна другого порядку і т. д.

Похідною *n*-го порядку $f^{(n)}(x)$ називається похідна від похідної $(n-1)$ порядку.

Приклад 21. Знайти $y'''(x)$, якщо $y=3e^{5x}$.

Розв'язання. $y'=3\cdot e^{5x}\cdot 5=15e^{5x};$

$$y''=15\cdot e^{5x}\cdot 5=75e^{5x};$$

$$y'''=75e^{5x}\cdot 5=375e^{5x}.$$

Тема 14-15. Дослідження функцій за допомогою похідних

Методичні поради до вивчення теми

Слід розглянути теоретичний матеріал з наступних питань теми: інтервали зростання та спадання функції, інтервали опуклості та вгнутості функції, асимптоти, правило Лопіталя.

План практичних занять

1. Знаходження інтервалів зростання та спадання функції.

2. Знаходження інтервалів опуклості та вгнутості функції.
3. Асимптоти графіка функції.
4. Правило Лопіталя.

Термінологічний словник ключових понять

Диференціалом функції $y = f\left(x\right)$ називається добуток її похідної на приріст незалежної змінної: $dy = f'\left(x\right)\Delta x$ або $dy = f'\left(x\right)dx$, оскільки $\Delta x = dx$. Із другої формули випливає, що $f'\left(x\right) = \dfrac{dy}{dx}$.

При достатньо малих Δx справедлива наближена формула

$$f\left(x+\Delta x\right) - f\left(x\right) \approx f'\left(x\right)\Delta x \qquad \text{або} \qquad f\left(x+\Delta x\right) \approx f\left(x\right) + f'\left(x\right)\Delta x .$$

Зростання і спадання функції. Достатня умова зростання (спадання) функції: якщо похідна диференційованої функції додатна (від'ємна) всередині деякого проміжку *X*, то вона на цьому проміжку зростає (спадає).

Екстремуми функції. Точка x_0 називається точкою максимуму (мінімуму) функції $y = f\left(x\right)$, якщо в деякому околі точки x_0 виконується нерівність

$$f\left(x\right) < f\left(x_0\right) \ \left(f\left(x\right) > f\left(x_0\right)\right).$$

Максимум і мінімум – екстремуми функції, або локальні екстремуми.

Необхідна умова екстремуму. Для того, щоб функція $y = f\left(x\right)$ мала екстремум в точці x_0, необхідно, щоб її похідна в цій точці дорівнювала нулю або не існувала.

Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються критичними точками I роду (ці точки повинні входити в область визначення функції). Критична точка не обов'язково є точкою екстремуму.

Перша достатня умова екстремуму функції. Якщо при переході через точку x_0 похідна змінює свій знак із «+» на «–», то точка x_0 – точка *максимуму*, а якщо із «–» на «+» – точка *мінімуму*.

Друга достатня умова екстремуму функції. Нехай функція $y = f\left(x\right)$ двічі диференційовна і $f'\left(x\right) = 0$. Тоді в точці x_0 функція має локальний максимум, якщо $f''\left(x_0\right) < 0$ і локальний мінімум, якщо $f''\left(x_0\right) > 0$.

Крива $y = f\left(x\right)$ називається ***опуклою на інтервалі*** $\left(a;b\right)$, якщо всі точки кривої лежать нижче її дотичних на цьому інтервалі.

Крива $y = f(x)$ називається ***вгнутою на інтервалі*** $(a;b)$, якщо всі точки кривої лежать вище будь-якої дотичної на цьому інтервалі.

Достатня умова опуклості (вгнутості) графіка функції. Якщо в усіх її точках інтервалу $(a;b)$ друга похідна функції $y = f(x)$ від'ємна (додатня), то функція $y = f(x)$ опукла (вгнута).

Точка кривої, що відокремлює її опуклу частину від вгнутої, називається ***точкою перегину кривої.***

Необхідна і достатня умова існування точки перегину. Якщо в точці x_0 друга похідна функції дорівнює нулю або не існує і при переході через цю точку друга похідна змінює знак, то точка x_0 є точкою перегину.

Пряма називається ***асимптотою*** кривої $y = f(x)$, якщо відстань від точки $M(x; f(x))$ до цієї прямої прямує до нуля при віддаленні точки М у нескінченність.

Вертикальні асимптоти: $x = a$ – вертикальна асимптота $y = f(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, тобто функція має розрив в точці $x = a$.

Похила асимптота: $y = kx + b$ – похила асимптота, де $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right)$.

Якщо $k = 0 \Rightarrow y = b$ – горизонтальна асимптота.

Правило Лопіталя. Границя відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення їх похідних, якщо останні існують.

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left[\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \to x_0(\infty)} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Приклад 22. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \left[\dfrac{0}{0} \right] = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\left(x^2 - 5x + 6\right)'}{\left(x^2 - 4\right)'} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x - 5}{2x} = \dfrac{1}{4}.$

Практичні завдання та методичні рекомендації до їх виконання

Схема дослідження графіка функції:

1. Область визначення функції.
2. Парність непарність, періодичність.
3. Точки перетину з осями координат.

4. Рівняння асимптот, якщо вони є.

5. Критичні точки I-го роду, інтервали монотонності, точки екстремумів.

6. Критичні точки II-го роду, інтервали опуклості, вгнутості, точки перегину.

7. Побудова графіка функції.

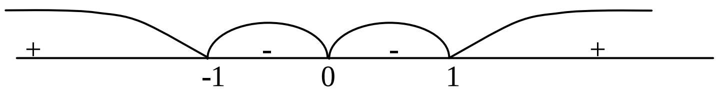
Приклад 23. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

Розв'язання.

1. Область визначення функції: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (-1; +\infty)$; адже при $x^2 - 1 = 0$ ця функція не існує і тому $x \neq \pm 1$.

2. $f(x) = f(-x)$ – функція є парною, її графік симетричний відносно вісі *OY*, функція не періодична.

3. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1} \geq 0 \Rightarrow x^2 (x-1) \cdot (x+1) \geq 0$.



Отже, при $x \in (-\infty; -1)$ графік *y* розміщений над віссю *OX,* при $x \in (-1; 1)$ він розміщений під прямою $y = 0$ і при $x \in (1; +\infty)$ – над прямою *OX*.

4. Оскільки $\lim\limits_{x \to \pm 1} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = \pm\infty$, то $x = 1$ і $x = -1$ – вертикальні асимптоти досліджуваної функції, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{x^2}} = 1 \Rightarrow y = 1$ – горизонтальна асимптота функції.

Похилих асимптот $y = kx + b$, ця функція не має: $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0$.

5. Знаходимо інтервали зростання, спадання функції і разом з тим можливий її екстремум:

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)'=\frac{2x\left(x^2-1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=-\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}\ \ i\ y'=0\,.$$

$f'(x<0)>0\to$ функція зростає, $f'(x>0)<0$ – функція спадає.

У точці $x=0$ – екстремум функції, а саме максимум: $f(0)=0$.

6. Тепер досліджуємо функцію на перегин. Маємо:

$$y''=\left(-\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=\frac{-2\left(x^2-1\right)^2+2x\left(x^2-1\right)2x}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{2x^2+2}{\left(x^2-1\right)^3}\neq 0\,.$$

Точок перегину немає. Побудуємо графік функції (рис. 18):

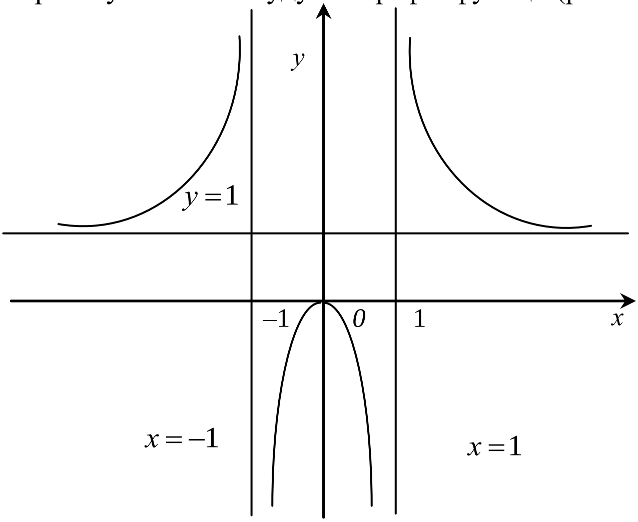


Рис. 18

Завдання для самостійної роботи

1. За правилом Лопіталя обчислити границі

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}$. 2) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-0,01x}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{x-\sin x}$. 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-\sin 2x}{x^3}$. 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x-1,5\sin 2x}$.

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$. 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}$. 9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^4}$. 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

2. Знайти інтервали зростання, спадання функції.

1) $y=\frac{x^2}{x-1}$.

2) $y=x^4-2x^2-5$.

3) $y=\frac{x^2-6x-16}{x-1}$.

4) $y=\frac{x^2}{x-1}$.

5) $y=x^4-2x^2-5$.

6) $y=ln\left(1+x^2\right)$

7) $y=\frac{4x}{x^2+4}$

8) $y=x^3+3x^2+3x$

9) $y=x^3-3x+5$

10) $y=x-ln\left(1+x\right)$

3. Знайти асимптоти до графіка функції.

1) $y=\frac{x^3+2x^2}{\left(x-1\right)^2}$.

2) $y=\frac{2x^3}{\left(x+2\right)^2}$.

3) $y=\frac{x^3}{3-x^2}$.

4) $y=\frac{2x}{\left(x+1\right)\left(x-2\right)}$.

5) $y=\frac{x^2}{x-1}$.

6) $y=\frac{3x^3}{\left(x-1\right)^2}$.

7) $y=\frac{x^2-x-1}{x^2-2x}$.

8) $y=\frac{\left(x-2\right)^2}{x+1}$.

9) $y=\frac{x+1}{\left(x-1\right)^2}$.

10) $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$.

4. Визначити інтервали опуклості і вгнутості функції.

1) $y=\frac{x^4+8}{x^3+1}$.

2) $y=ln\left(1+x^3\right)$.

3) $y=\frac{2x^2-x}{\left(x-1\right)^2}$.

4) $y=\frac{x^2+6}{x^2+1}$.

5) $y=ln\left(1+x^2\right)$.

6) $y=\frac{2x-1}{\left(x-1\right)^2}$

7) $y=\frac{4-2x}{1-x^2}$

8) $y=\frac{5x}{4-x^2}$

9) $y=\frac{x^2}{4x^2-1}$

10) $y=\frac{x^3}{x^2-x+1}$

5. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік.

1) $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$.

2) $y=\frac{4x-x^2-4}{x}$.

3) $y=\frac{x^2-x-1}{x^2-2x}$.

4) $y=\frac{x+1}{(x-1)^2}$.

5) $y=\frac{x}{9-x}$.

6) $y=\frac{x^2}{4x^2-1}$.

7. $y=\frac{x^3}{x^2-x+1}$.

8) $y=\frac{(x-2)^2}{x+1}$.

9) $y=\frac{x^2+6}{x^2+1}$.

10) $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

6. Знайти диференціал функції та обрахувати його в точці $x=-1$, якщо $\Delta x=0{,}01$.

1) $y=4x^5+2x^4-3x^{-2}+5$.

2) $y=\sqrt{x}+2x^9-3x^2+5$.

3) $y=4x^8+9x^6-3x^{-2}+8$.

4) $y=7x^7+\sqrt[3]{x}-3x^2+5$.

5) $y=12x^5+x^4-5x^3+5x$.

6) $y=3x^7+8x^5-3x^3+5x$.

7) $y=7x^7+x^3-3x^2+5$.

8) $y=4x^6+2x^3-3x^2+5x$.

9) $y=2x^5+x^2-5x^3+7x$.

10) $y=3x^5+x^6-3x^2+1$.

7. Записати рівняння дотичної і нормалі до кривої в точці $x_0=-1$:

1) $y=x^5+5x^4-3x^2+1$.

2) $y=4x^6+2x^3-3x^2+5x$.

3) $y=x^3+4x^4-3x^2+6$.

4) $y=7x^7+2x^4-3x^3+5x^2-3$.

5) $y=x^3+2x^2-x+5$.

6) $y=3x^5+2x^3-4x^2+8x$.

7) $y=x^6+2x^5-3x^4+3x;$

8) $y=5x^3-4x^2+3x-6$.

9) $y=5x^5+4x^4-3x^3+5x^2+1$.

10) $y=4x^6+2x^5-3x^4+3x$.

8. Наближено обчислити вирази: 1) $\sqrt{\frac{4-3{,}02}{1+3{,}02}}$; 2) $cos151^\circ$.

3) $\sqrt[7]{130}$; 4) $sin93^\circ$ 5) $ln\left(e^2+0{,}2\right)$; 6) $\sqrt[4]{16{,}64}$

7) $(5{,}07)^3$ 8) $arcsin0{,}54$ 9) $\sqrt[10]{1025}$ 10) $lntg46^\circ$

Тема 16. Функції декількох незалежних змінних

Методичні поради до вивчення теми

Слід розглянути теоретичний матеріал з наступних питань теми: функція багатьох змінних, область визначення, множина значень, способи задання функції, диференційованість функції двох змінних, диференціювання складної функції, частинні похідні і повні диференціали вищих порядків.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Нехай задано функцію $z = f(x, y)$. Якщо вважати одну зі змінних, наприклад *y*, фіксованою, то функцію *f* можна рахувати як функцію тільки від змінної *x* і знайти похідну функції *f* від *x*, позначивши її $\frac{\partial f}{dx}$.

Нехай $z = f(x, y)$. Тоді

1. Частинна похідна функції *f* по змінній *x* є функція

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \qquad (1)$$

при цьому $\frac{\partial f}{dx}$ визначена в кожній точці (x, y) області визначення функції *f*, для яких існує границя (1).

2. Частинна похідна функції *f* по змінній *y* є функція

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \qquad (2)$$

при цьому $\frac{\partial f}{dy}$ визначена в кожній точці (x, y) області визначення функції *f*, для яких існує границя (2).

Зауважимо, що при знаходженні частинної похідної по одній змінній, усі інші аргументи слід вважати постійними величинами.

Наприклад, якщо $z = f(x, y)$, то для знаходження $\frac{\partial f}{dx}$ вважаємо, що *y* – постійна величина і диференціюємо функцію тільки по *x*. Для знаходження $\frac{\partial f}{dy}$ вважаємо, що *x* – постійна величина і диференціюємо функцію тільки по *y*.

Існують і інші позначення для частинних похідних.

Якщо $z = f\left(x, y\right)$, тоді

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f\left(x, y\right)\right) \text{ та } \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(f\left(x, y\right)\right). \quad (3)$$

Частинні похідні першого порядку, обчислені в точці $\left(a,b\right)$, позначаються як

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} \text{ та } \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} \quad (4)$$

Частинні похідні функції $z = f\left(x, y\right)$ мають просту геометричну інтерпретацію, а саме: похідна $\frac{\partial f}{dx}$ або $\frac{\partial f}{dy}$ чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до кривої лінії, яка утворюється перетином поверхні $z = f\left(x, y\right)$ площиною $y = y_0$ або $x = x_0$.

Частинні похідні вищих порядків

Відомо, що коли $y = f\left(x\right)$, то $y' = \frac{df}{dx}$ і $y'' = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$, тобто друга похідна функції *f* є похідна від першої похідної функції *f*.

Аналогічно, коли $z = f\left(x, y\right)$, можна продиференціювати кожну з двох «перших» частинних похідних $\frac{\partial f}{dx}$ та $\frac{\partial f}{dy}$ по обох змінних *x* та по *y*, і одержати чотири частинних похідних другого порядку, а саме:

1. Диференціюючи двічі по змінній *x*:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right). \quad (5)$$

2. Диференціюючи двічі по змінній *y* отримаємо:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right). \quad (9)$$

3. Диференціюючи спочатку по змінній *x*, далі по змінній *y*, отримуємо:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right). \quad (10)$$

4. Диференціюючи спочатку по змінній y, далі по змінній x, маємо:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right). \tag{11}$$

Похідні $\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$ та $\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$ називають змішаними частинними похідними другого порядку.

Наприклад, нехай $z = f(x, y) = x^3y^3 - xy^5$. Обчислити частинні похідні другого порядку.

Розв'язання. Маємо $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 - y^5$ і $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 5xy^4$.

Тоді $$\frac{d^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y^2 - y^5\right) = 6xy^2;$$

$$\frac{d^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^3y - 5xy^4\right) = 2x^3 - 20xy^3;$$

$$\frac{d^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^2 - y^5\right) = 6x^2y - 5y^4;$$

$$\frac{d^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3y - 5xy^4\right) = 6x^2y - 5y^4.$$

Із розв'язання помітно, що $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Теорема. Якщо f, f'_x, f'_y, f''_{xy} і f''_{yx} неперервна в точці $(x_0; y_0)$, тоді $f''_{xy}(x_0; y_0) = f''_{yx}(x_0; y_0)$.

Тобто змішана частинна похідна другого порядку не залежить від порядку диференціювання функцій.

Повний диференціал функцій двох змінних

Для функції від однієї змінної $y = f(x)$ диференціал функції визначається як $dy = f'(x)dx$.

Якщо для функції $z = f(x, y)$ існують частинні похідні першого порядку і вона неперервна в деякій області *D*, то повний диференціал функції двох змінних знаходять за формулою (12):

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \qquad (12)$$

Завдання для самостійної роботи

1. Дано функцію двох змінних $z = f(x, y)$. Обчислити частинні похідні другого порядку.

1) $z = f(x,y) = 3x + y - xy + 6$ 2) $z = f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$

3) $z = f(x,y) = 2xy - 2x^2 - 4y^2$ 4) $z = f(x,y) = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$

5) $z = f(x,y) = 5x^2 - 3xy + y^2$

2. Дано функцію двох змінних $z = f(x, y)$. Довести, що $\frac{d^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{d^2 f}{\partial y \partial x}$.

1) $z = ln(3xy - 4)$; 2) $z = sin(x^2 - y)$;

3) $z = cos(3x^2 - y^3)$; 4) $z = e^{x^2 - y^2}$; 5) $z = cos(xy^2)$

3. Знайти екстремум функції двох змінних, та значення функції в точках екстремуму.

1. $Z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$; 2. $Z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$;

3. $Z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$; 4. $Z = (x-1)^2 + 2y^2$;

5. $Z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$; 6. $Z = x^3 + y^3 - 3xy$;

РОЗДІЛ VI. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Тема 18. Невизначений інтеграл

Методичні поради до вивчення теми

Слід розглянути теоретичний матеріал з наступних питань теми: поняття первісної; невизначений інтеграл; властивості невизначеного інтегралу; таблиця основних інтегралів; безпосереднє інтегрування; метод інтегрування частинами; метод підстановки; інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен; інтегрування раціональних дробів; інтегрування тригонометричних функцій.

План практичного заняття

1. Метод інтегрування невизначеного інтегралу.
2. Метод підстановки.
3. Метод інтегрування частинами.

Термінологічний словник ключових понять

Інтегрування функції – знаходження первісних функції.

Інтегрування розкладом – метод інтегрування за формулою:

$$\int\left(f_1(x)+f_2(x)\right)dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx.$$

Інтегрування частинами – метод інтегрування за формулою $\int u\cdot dv=u\cdot v-\int vdu$.

Метод підстановки – метод інтегрування за формулами:

$$\int f(x)dx=\left|\begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt; \\ t=\varphi^{-1}(x) \end{array}\right|=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

і

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\left|\varphi(x)=t\right|=\int f(t)dt$$

Первісною функцією для функції $f(x)$ називається така функція $F(x)$, похідна якої дорівнює даній функції, тобто $F'(x)=f(x)$.

Невизначеним інтегралом від неперервної функції $f(x)$ або від диференціального виразу $f(x)dx$ називається сукупність усіх первісних функції $f(x)$: $\int f(x)dx=F(x)+C$, де $F'(x)=f(x)$.

Функція $f(x)$ називається підінтегральною функцією, а $f(x)dx$ – підінтегральним виразом.

Таблиця основних невизначених інтегралів

1. $\int dx = x + c.$
2. $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c.$
3. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$
4. $\int e^x dx = e^x + c.$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\, a} + c.$
6. $\int cos\, x dx = sin\, x + c.$
7. $\int sin\, x dx = -cos\, x + c.$
8. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + c.$
9. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + c.$
10. $\int tgx = -ln|cos\, x| + c.$
11. $\int ctgx = ln|sin\, x| + c.$
12. $\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c.$
13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c.$
14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c.$
15. $\int \frac{xdx}{x^2 + a} = \frac{1}{2} ln|x^2 + a| + c.$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin \frac{x}{a} + c.$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + c.$
18. $\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + c.$
19. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} arcsin \frac{x}{a} + c.$
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = arcsin\, x + c = -arccos\, x + c.$
21. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctgx + c = -arcctgx + c_1.$

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Безпосереднє інтегрування

Обчислення інтегралів із використанням основних властивостей невизначених інтегралів і таблиць найпростіших інтегралів називається безпосереднім інтегруванням.

Приклад 24. Знайти

$$\int \left(3x^2 - 2 sin\, x + 5\right) dx = \frac{3x^3}{3} + 2 cos\, x + 5x + C = x^3 + 2 cos\, x + 5x + C\ .$$

Метод підстановки

Заміна змінної інтегрування, що призводить до зведення невизначеного інтеграла до табличного називається методом підстановки або методом заміни змінної. Можна використовувати підстановку двох видів:

1) змінна інтегрування x замінюється функцією змінної t: $x=\varphi(t)$; $dx=\varphi'(t)dt$.

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

2) нова змінна t вводиться як функція змінної інтегрування x: $t=\varphi(x)$, $dt=\varphi'(x)dx$.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(t)dt .$$

Приклад 25. Знайти інтеграл $\int \frac{2x}{x^2+3}dx$.

Розв'язання. $\int \frac{2x}{x^2+3}dx=\begin{bmatrix} x^2+3=t \\ 2xdx=dt \end{bmatrix}=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|x^2+3|+C$

Інтегрування за частинами

Інтегрування за частинами виконується за формулою:

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

В інтегралах виду $\int P(x)\cdot e^x dx$; $\int P(x)\cdot \sin xdx$; $\int P(x)\cdot \cos xdx$; доцільно обирати $u=P(x)$, а залишену частину підінтегрального виразу позначити dv .

В інтегралах виду $\int P(x)\cdot \ln xdx$; $\int P(x)\cdot \arcsin xdx$; $\int P(x)\cdot \mathrm{arctg} xdx$; доцільно брати $dv=P(x)dx$, а залишок підінтегрального виразу дорівнюватиме u .

Приклад 26. Знайти інтеграл $\int x\cdot e^{8x}dx$.

Розв'язання.

$$\int xe^{8x}dx=\begin{bmatrix} \int udv=uv-\int vdu & \\ x=u & dx=du \\ e^{8x}dx=dv & v=\frac{1}{8}e^{8x} \end{bmatrix}=\frac{x}{8}e^{8x}-\frac{1}{8}\int e^{8x}dx=\frac{x}{8}e^{8x}-\frac{1}{64}e^{8x}+C .$$

Інтегрування функцій, що містять квадратний тричлен

Розглянемо інтеграли виду (1) $\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}dx$ та (2) $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{x^2+bx+c}}dx$.

Інтеграл виду (1) зводиться до табличних:

а) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$;

б) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln\left| f(x) \right| + C$;

в) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$.

Інтеграл виду (2) зводиться до табличних:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C$;

б) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = ln\left| x+\sqrt{x^2+k} \right| + C$.

Інтегрування раціональних функцій

Раціональною функцією $R(x)$ називається функція, яка дорівнює відношенню двох многочленів:

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots a_a},$$

де m, n – цілі додатні числа; $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ – довільні дійсні числа.

Якщо $m < n$, то $R(x)$ називають правильним дробом, якщо $m \geq n$ – неправильним дробом.

Шляхом ділення чисельника на знаменник можна представити у вигляді суми деякого многочлена та правильного дробу:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = M_{m-n}(x) + \frac{Q_l(x)}{P_n(x)},$$

де $M_{m-n}(x),\ Q_l(x)$ – многочлени; $\frac{Q_l(x)}{P_n(x)}$ – правильний дріб.

Для того, щоб проінтегрувати правильний раціональний дріб, необхідно скористатись теоремою про розклад правильних раціональних дробів на суму простіших від даних.

Простим дробом називається дріб одного із наступних видів:

$$1)\ \frac{A}{x-a};\ 2)\ \frac{A_k}{(x-a)^k};\ 3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q};\ 4)\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},$$

де *A, a, M, N, p, q* – сталі числа;

k – ціле число, $k \ge 2$, $p^2 - 4q < 0$.

Для обчислення *A, M, N* використовують метод невизначених коефіцієнтів або метод часткових значень.

Інтегрування тригонометричних виразів

Інтеграли виду $\int sin\,ax\,sin\,bxdx$, $\int cos\,ax\,cos\,bxdx$, $\int sin\,ax\,cos\,bxdx$ знаходять за допомогою тригонометричних формул:

$$sin\,\alpha\,sin\,\beta = \frac{1}{2}\big(cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta)\big);$$

$$cos\,\alpha\,cos\,\beta = \frac{1}{2}\big(cos(\alpha-\beta) + cos(\alpha+\beta)\big);$$

$$sin\,\alpha\,cos\,\beta = \frac{1}{2}\big(sin(\alpha-\beta) + sin(\alpha+\beta)\big).$$

Інтеграли виду $\int sin^m x\,cos^n xdx$

1. Якщо *m, n* – парні числа, знаходять за допомогою формул:

$$sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos\,2x);$$

$$cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos\,2x);$$

$$sin\,x\,cos\,x = \frac{1}{2}sin\,2x.$$

2. Якщо хоча б одне із чисел *m* або *n* непарне, то від непарної степені відокремлюється множник і вводиться нова змінна, якщо $n = 2k+1$, то

$$\int sin^m x\,cos^{2k+1} xdx = \int sin^m x\,cos^{2k} cos\,xdx =$$

$$= \int sin^m x\left(1 - sin^2 x\right)^k d(sin\,x) = \int t^m \left(1 - t^2\right)^k dt.$$

3. Якщо *m* і *n* – цілі парні, але одне із них від’ємне, то можна використати підстановку $tgx = t$.

4. Інтеграли від степені однієї тригонометричної функції:

$$\int sin^m xdx, \int cos^m xdx, \int tg^m xdx, \int ctg^m xdx.$$

Знаходять інтегруванням за частинами або через заміну змінної.

Інтеграли виду $\int R(sin x, cos x)dx$, де R – раціональна функція, розв'язують за допомогою підстановки: $tg\frac{x}{2}=t$, при цьому

$$sin x=\frac{2t}{1+t^2}, cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Якщо $R(sin x, cos x)$ є непарною функцією відносно $sin x$ або $cos x$, то можна скористатися підстановкою $t=cos x$ або $t=sin x$.

Якщо $R(sin x, cos x)$ парна функція відносно $sin x$ або $cos x$ одночасно, то інтеграл зводиться до інтеграла від раціональної функції за допомогою підстановки $tgx=t$.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити інтеграл методом безпосереднього інтегрування:

1) $\int\left(\frac{3x^2+1}{x^5}\right)dx.$ 2) $\int\frac{4}{\sqrt{x^2+9}}dx.$ 3) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x^7}}+cos x\right)dx$

4) $\int\frac{6x^6-3x^4-5}{7x^3}dx.$ 5) $\int\frac{6x^6-3x^4-5}{3x^4}dx.$ 6) $\int\left(2x^7-\frac{4}{\sqrt[3]{x}}+2^x-3\right)dx.$

7) $\int sin(7x+1)dx.$ 8) $\int sin(2-3x)dx.$ 9) $\int 3cos(3+2x)dx.$

10) $\int\frac{x}{\sqrt{2x^2+3}}dx.$ 11) $\int\frac{x}{9x^2+7}dx.$ 12) $\int\frac{ln^6(7x+1)}{7x+1}dx.$

2. Обчислити інтеграл методом інтегрування за частинами:

1) $\int x sin 5xdx.$ 2) $\int xe^{-2x}dx.$ 3) $\int x ln xdx.$

4) $\int xarctg 2xdx.$ 5) $\int(x+1)cos xdx.$ 6) $\int 2xarctg 3xdx.$

7) $\int 2x cos 4xdx.$ 8) $\int 3xarctg 5xdx.$

9) $\int 3x sin 5xdx.$ 10) $\int(x+2)e^x dx.$

3. Обчислити інтеграли:

1) $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx.$ 2) $\int \frac{2x-1}{3x^2-2x+6}dx.$ 3) $\int \frac{dx}{3x^2-6x+1}.$

4) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}.$ 5) $\int \frac{dx}{2x^2+x+2}.$ 6) $\int \frac{dx}{2x^2-11x+2}.$

7) $\int \frac{43x-67}{(x-2)(x^2-2x+3)}.$ 8) $\int \frac{8x}{(x+3)(x^2+6x+5)}.$

9) $\int \frac{6x^2+6x-6}{(x+1)(x^2+x-2)}.$ 10) $\int \frac{37x-85}{(x-4)(x^2+2x-3)}.$

11) $\int sin3x \cdot cos\, xdx$ 12) $\int cos\,2x \cdot cos\,3xdx$

13) $\int sin4x \cdot cos\,2xdx$ 14) $\int sin2x \cdot sin3xdx$

15) $\int sin^2 3x \cdot cos\,3xdx$ 16) $\int sin^4 2x \cdot cos\,2xdx$

Тема 19. Визначений інтеграл

Методичні поради до вивчення теми

Слід розглянути теоретичний матеріал з наступних питань теми: визначений інтеграл; властивості визначеного інтегралу; формула Ньютона-Лейбніца.

План практичного заняття

1. Застосування формули Ньютона-Лейбніца.
2. Обчислення площ плоских фігур.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Визначений інтеграл

Нехай на відрізку $[a;b]$ задана невід'ємна функція $y=f(x)$. Знайдемо площу S криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y=f(x)$, прямими $x=a,\ x=b$ та віссю абсцис $y=0$ (рис. 19).

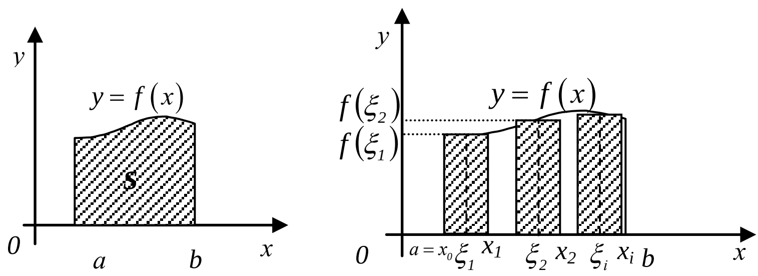


Рис. 19

Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n елементарних відрізків точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$, де $x_0 = a$, $x_n = b$ (рис. 19). Довжина кожного відрізка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. На кожному інтервалі $(x_{i-1};\ x_i)$ виберемо точку ξ_i. Площа довільного прямокутника S_i дорівнює $f(\xi_i)\Delta x_i$. Знайдемо суму площ усіх таких прямокутників.

Сума виду $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ називається інтегральною сумою для функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Визначеним інтегралом від функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається границя її інтегральної суми у випадку, коли число елементарних відрізків необмежено зростає, а довжина найбільшого з них прямує до нуля:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i\ ,$$

де $\lambda = max\,\Delta x_i$ – довжина найбільшого з елементарних відрізків.

Число a називають нижньою границею інтеграла, число b – верхньою границею.

Геометричний зміст визначеного інтеграла. Якщо функція $y = f(x)$ невід'ємна на відрізку $[a;b]$, $\int_a^b f(x)dx$ чисельно дорівнює площі S під кривою $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$ (рис. 19).

Приклад 27. Обчислити $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}} = \left| \begin{array}{lccc} 1+\sqrt{2x+1} = t,\ dx = (t-1)dt; & & & \\ x = \dfrac{(t-1)^2}{2}, & x & 0 & 4 \\ & t & 2 & 4 \end{array} \right| = \int_2^4 \frac{t-1}{t}dt =$$

$$= \int_2^4 \left(1 - \frac{1}{t}\right)dt = \left(t - ln|t|\right)\Big|_2^4 = 4 - ln4 - (2 - ln2) = 2 - ln2\,.$$

Приклад 28. Обчислити $\int\limits_1^e x\,ln\,xdx$.

$$\int\limits_1^e x\,ln\,xdx = \left| \begin{matrix} u = ln\,x,\; du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = xdx,\; v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}ln\,x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int\limits_1^e \frac{x^2dx}{x} = \frac{x^2}{2}ln\,x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e =$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(ln\,x - \frac{1}{2}\right)\Big|_1^e = \frac{e^2}{2}\left(ln\,e - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(ln1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{e^2+1}{4}.$$

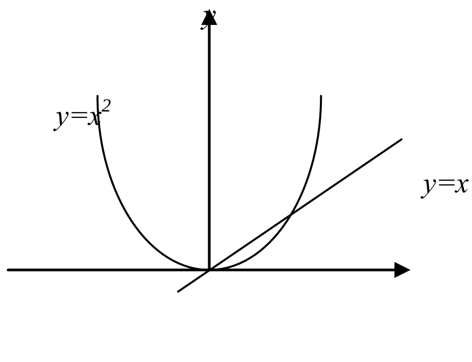
Формула Ньютона-Лейбніца

Визначений інтеграл від неперервної функції на даному проміжку дорівнює різниці значень довільної первісної цієї функції для верхньої і нижньої границь інтегрування:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \text{ де } F'(x) = f(x).$$

Приклад 29. Знайти площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = x^2$ і $y = x$.

Розв'язання. Відомо, що $\int^b f(x)dx = S$.



Межі інтегрування $a=0$ і $b=0$ оскільки система $\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases}$ дає $x=x^2$, звідки $x_1=0$ і $x_2=1$; $(a=x_1;\ b=x_2)$.

З рисунка видно, що $S=\int_0^1 \left(x-x^2\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ кв. од.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити інтеграли:

1. $\int_{-1}^{2}\left(1+3x-2x^2\right)dx$ 2. $\int_1^3 \frac{3x^2+2x-5}{x^3}dx$ 3. $\int_a^b \sqrt{x}dx$

4. $\int_0^1 x\cdot(1-x)^7 dx$ 5. $\int_0^a 8\left(a^2-x^2\right)dx$ 6. $\int_0^1 \left(1+e^x\right)^2 dx$

7. $\int_1^2 \frac{2x}{x^2+5}dx$ 8. $\int_{\pi/2}^{\pi} 3\sin 2x dx$ 9. $\int_{-1}^{2}\left(2+e^{\frac{x}{2}}\right)dx$

10. $\int_{-1}^{7}\frac{dt}{\sqrt{3t+1}}$ 11. $\int_{-1}^{2}\frac{x^2}{x^2+1}dx$ 12. $\int_0^2 \frac{2x+3}{x^2-5}dx$

13. $\int_1^3 \frac{dx}{2x^2-6}$ 14. $\int_0^{\pi/2}\sin(2x+3)dx$ 15. $\int_0^1 e^{2x}dx$

2. Знайти площу фігури обмеженої заданими лініями.

1) $y=x^2$, $y=x+1$.
2) $y=x^2$, $x=-2+x^2$
3) $y=x^2+1$, $x+y=3$.
4) $y=x^2$, $y=0$, $x=4$ і $x=0$.
5) $y=x^2$, $x=2-x^2$.
6) $y=x^3$, $y=x^2$.
7) $y=x^2$, $y=3x$, $x=1$ і $x=2$.
8) $y=1-x^2$ віссю Ox та прямими $x=0$ та $x=2$.
9) $y=x^2-4$ віссю Ox та прямими $x=0$ і $x=3$.
10) $y=-x^2$ віссю Ox та прямими $x=0$ і $x=3$.

РОЗДІЛ VII. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Тема 20. Диференціальні рівняння першого порядку

Слід розглянути теоретичний матеріал з наступних питань теми: диференціальні рівняння, розв’язок диференціальних рівнянь; диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними; однорідні диференціальні рівняння; лінійні диференціальні рівняння; рівняння, що допускають зниження порядку.

Термінологічний словник ключових понять

Задача Коші – задача пошуку розв’язку із заданими початковими умовами.

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними – рівняння, в якому можна відокремити змінні.

Однорідні диференціальні рівняння – рівняння першого порядку з однорідною правою частиною.

Диференціальні рівняння у повних диференціалах – диференціальні рівняння, що визначаються повним диференціалом деякої функції.

Лінійні диференціальні рівняння – рівняння лінійно залежить від невідомої функції і її похідної.

Диференціальним рівнянням першого порядку називається співвідношення виду $F\left(x,y,\dfrac{dy}{dx}\right)=0$. (1)

де x – незалежна змінна;

$y=y(x)$ – невідома функція аргументу x;

$F(x,y,y')$ – задана функція змінних x, y, $y'=\dfrac{dy}{dx}$.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Рівняння (1) не визначене відносно похідної, а рівняння виду

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y), \tag{2}$$

де $f(x,y)$ – задана функція двох змінних, називається диференціальним рівнянням першого порядку, визначеним відносно похідної. Часто зустрічається і такий запис диференціального рівняння першого порядку:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,$$

де $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ – задані функції змінних x і y.

Співвідношення $\Phi(x, y)=0$ називається розв'язком рівняння (2) у неявній формі (або інтегралом рівняння (2)), якщо воно визначає y як функцію від x: $y=\varphi(x)$, яка є розв'язком рівняння (2).

Задача про знаходження розв'язку $y=\varphi(x)$ рівняння (2), що задовольняє початкову умову $\varphi(x_0)=y_0$, називається задачею Коші.

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння виду
$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y) \tag{3}$$
називається рівнянням з відокремлюваними змінними.

Якщо в точці $y=c_0$, $g(c_0)=0$, то функція $y=c_0$ є розв'язком рівняння (3). Розв'язки рівняння (3), уздовж яких $g(y)\neq 0$, задовольняють співвідношення
$$\int\frac{dy}{g(y)}-\int f(x)dx=C. \tag{4}$$

Теорема. Нехай функції $f(x)$ і $g(y)$ визначені і неперервно диференційовані в околі точок $x=x_0$, $y=y_0$ відповідно, причому $g(y_0)\neq 0$. Тоді розв'язок $y=\varphi(x)$ рівняння (3) з початковою умовою $\varphi(x_0)=y_0$ існує в деякому околі точки $x=x_0$ єдиний і задовольняє співвідношення:
$$\int_{y_0}^{\varphi(x)}\frac{dy}{g(y)}=\int_{x_0}^{x}f(x)dx. \tag{5}$$

Рівняння виду $\dfrac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$ зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними заміною $ax+by+c=z$.

Приклад 30. Розв'язати рівняння $x(1+y^2)+y(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}=0$.

Розв'язання. Для цього необхідно представити рівняння у вигляді $x(1+y^2)dx+y(1+x^2)dy=0$. Поділивши обидві частини цього рівняння на добуток $(1+x^2)(1+y^2)$, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними: $\dfrac{x}{1+x^2}dx+\dfrac{y}{1+y^2}dy=0$.

Інтегруючи це рівняння, отримаємо: $\displaystyle\int\frac{x}{1+x^2}dx+\int\frac{y}{1+y^2}dy=C_1$

$$\frac{1}{2}ln\left(1+x^2\right)+\frac{1}{2}ln\left(1+y^2\right)=\frac{1}{2}lnC\left(\frac{1}{2}lnC=C_1\right).$$

Звідси $\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)=C$.

1) Розв’язати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y^2dx+\left(x+1\right)dy=0.$$

$$\left(y^2+1\right)dx+xydy=0.$$

$$\left(x+1\right)dy-\left(y-2\right)dx=0.$$

$$\left(1+y^2\right)dx+\left(x^2+1\right)dy=0.$$

$$\sqrt{1-y^2}dx+\sqrt{1-x^2}dy=0.$$

$$\left(1+y\right)dx+\left(x+1\right)dy=0.$$

$$ydx-\left(1-2x\right)dy=0.$$

$$2ydx-\left(2x+6\right)dy=0.$$

$$xy\cdot\frac{dy}{dx}=1-x^2.$$

$$\sqrt{y}dx+x^2dy=0.$$

Лінійні рівняння першого порядку

Рівняння виду $\frac{dy}{dx}+a\left(x\right)y=b\left(x\right)$ (6)

називається лінійним. Є декілька методів розв’язування цього рівняння.

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)

Щоб розв’язати рівняння (6), треба спочатку розв’язати відповідне однорідне рівняння (це робиться шляхом відокремлення змінних):

$$\frac{dy}{dx}+a\left(x\right)y=0. \qquad (7)$$

Його загальний розв'язок має вигляд: $y = Ce^{-\int a(x)dx}$.

Далі необхідно довільну сталу *C* замінити на невідому функцію *C(x)*, потім вираз, отриманий для *y*, підставити в рівняння (6) і знайти функцію $C(x)$. В результаті знайдену функцію $C(x)$ необхідно підставити замість *C* в загальний розв'язок однорідного рівняння.

Метод Бернуллі

Необхідно шукати розв'язок функції у вигляді $y = u(x)\cdot \upsilon(x)$. Оскільки $y' = u'(x)\cdot \upsilon(x) + u(x)\cdot \upsilon'(x)$, і $y' = \dfrac{dy}{dx}$, рівняння набуває вигляду:

$$u'\upsilon + u\upsilon' + a(x)\cdot u\upsilon = b(x)$$

$$\text{або } \left[u' + a(x)u\right]\cdot \upsilon + u\upsilon' = b(x).$$

Оберемо за $u(x)$ один із розв'язків рівняння $u' + a(x)\cdot u = 0$, $\Rightarrow$ $\dfrac{du}{dx} = -a(x)\cdot u$, $\Rightarrow$ $\int \dfrac{du}{u} = -\int a(x)dx$, $\Rightarrow$ $ln u(x) = -\int a(x)dx$, $\Rightarrow$ $u(x) = e^{-\int a(x)dx}$. Тоді $\upsilon(x)$ знаходимо із рівняння $e^{-\int a(x)dx}\dfrac{d\upsilon}{dx} = b(x)$, тобто $\upsilon(x) = C + \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx$.

У результаті загальний розв'язок рівняння має такий вигляд:

$$y = e^{-\int a(x)dx}\left[C + \int b(x)\cdot e^{\int a(x)dx}dx\right].$$

Деякі рівняння стають лінійними, якщо *x* вважати функцією, а *y* – аргументом. Так, нелінійне рівняння $A(y) + B(y)\cdot x - C(y)\cdot \dfrac{dy}{dx} = 0$ розв'язується аналогічно до рівняння (6), якщо його представити у вигляді

$$\frac{dx}{dy} + \varphi(y)\cdot x = f(y).$$

Для того, щоб розв'язати рівняння Бернуллі, тобто рівняння

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x)\cdot y^n \quad (n \neq 0,1),$$

яке можна записати у вигляді $y^{-n}\frac{dy}{dx}+a(x)\cdot y^{1-n}=b(x)$, $y\neq 0$, необхідно зробити заміну $z=y^{1-n}$, яка зведе його до лінійного, і розв'язати викладеним вище способом. Проте розв'язки рівняння Бернуллі зручно шукати у вигляді $y=u(x)\cdot \upsilon(x)$, не зводячи його до лінійного.

Приклад 31. Розв'язати рівняння $x\frac{dy}{dx}-2y=2x^4$.

Розв'язання. Шукаємо розв'язок цього рівняння у вигляді добутку двох функцій $y=u(x)\cdot\upsilon(x)$. Маємо:

$$x\frac{du}{dx}\upsilon+x\underline{u}\frac{d\upsilon}{dx}-2\underline{u}\upsilon=2x^4;\quad x\frac{du}{dx}\upsilon+u\left[x\cdot\frac{d\upsilon}{dx}-2\upsilon\right]=2x^4.$$

Виберемо функцію $\upsilon(x)$ так, щоб $x\cdot\frac{d\upsilon}{dx}-2\upsilon=0$. Розділивши змінні та проінтегрувавши отримане, отримаємо

$$\int\frac{d\upsilon}{\upsilon}=2\int\frac{dx}{x};\quad ln|\upsilon|=2ln|x|\;,\Rightarrow \upsilon=x^2.$$

Функцію $u(x)$ знайдемо із рівняння: $x^3\frac{du}{dx}=2x^4$, $\int du=2\int xdx \Rightarrow$ $u=x^2+C$. Оскільки $y=u\cdot\upsilon$, то загальним розв'язком початкового рівняння буде $y=Cx^2+x^4$.

Тема 21-22. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Методичні поради до вивчення теми

Слід розглянути теоретичний матеріал з наступних питань теми: лінійні неоднорідні диференціальні рівняння II порядку; характеристичне рівняння.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Лінійні неоднорідні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами мають вигляд:

$$y''+py'+qy=f(x), \tag{1}$$

де p, q – сталі коефіцієнти;

$f(x)$ – задана неперервна функція.

Загальним розв'язком рівняння (1) є сума будь-якого частинного розв'язку цього рівняння y^* і загального розв'язку $\tilde{y}$ відповідного однорідного рівняння:

$$y'' + py' + qy = 0. \qquad (2)$$

Таким чином, задача зводиться до знаходження загального рівняння і частинного рівняння.

1. Розглянемо спочатку однорідне рівняння (2). Його розв'язок необхідно знаходити в вигляді $y = e^{kx}$, де k – стала. Підставляючи в (2): $y = e^{kx}$; $y' = ke^{kx}$; $y'' = k^2 e^{kx}$, отримаємо $e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0$, оскільки $e^{kx} \neq 0$, то маємо рівняння, яке називається характеристичним до рівняння (2): $k^2 + pk + q = 0$.

а) якщо корені k_1 і k_2 характеристичного рівняння дійсні й різні ($k_1 \neq k_2$), то загальний розв'язок рівняння (2) має вигляд:

$$\tilde{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі;

б) якщо корені k_1 і k_2 дійсні й однакові ($k_1 = k_2$), то загальний розв'язок рівняння (2) має вигляд: $\tilde{y} = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{k_1 x}$;

в) якщо корені характеристичного рівняння комплексні $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, де $\alpha = -\dfrac{p}{2}$; $\beta = \sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}$; $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця, то в цьому випадку загальний розв'язок рівняння (2) має вигляд: $\tilde{y} = e^{\alpha x}\left(C_1 \cdot cos\,\beta\, x + C_2 \cdot sin\,\beta\, x\right)$.

2. Розглянемо тепер неоднорідне рівняння (1). Для отримання загального розв'язку цього рівняння необхідно знайти будь-який частинний розв'язок y^*. Для знаходження y^* необхідно скористатись таким правилом:

а) Якщо права частина $f\left(x\right)$ рівняння (1) має вигляд $f\left(x\right) = R_n\left(x\right) e^{\alpha x}$, де $R_n\left(x\right)$ – многочлен *n*-го степеня, то в цьому випадку частинний розв'язок y^* треба шукати в вигляді $y^* = x^s P_n\left(x\right) \cdot e^{\alpha x}$, де $P_n\left(x\right)$ – многочлен того ж степеня *n*, що і $P_n\left(x\right)$, але з невідомими коефіцієнтами, а число s може приймати три значення:

1) $s = 0$, якщо число α не є коренем ($\alpha \neq k_1$; $\alpha \neq k_2$) характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$;

2) $s=1$, якщо число α є однократним коренем ($\alpha=k_1$ або $\alpha=k_2$) характеристичного рівняння;

3) $s=2$, якщо число α – двократний корінь ($\alpha=k_1=k_2$) характеристичного рівняння;

б) Якщо права частина $f(x)$ рівняння (1) має вигляд $f(x)=e^{\alpha x}\left[R_n(x)\cdot cos\,\beta x+Q_m(x)\cdot sin\,\beta x\right]$, де $R_n(x)$ і $Q_m(x)$ – многочлени степеня n і m відповідно. В цьому випадку частинний розв'язок y^* слід шукати у вигляді $y^*=x^s\cdot e^{\alpha x}\left[P^{(1)}(x)cos\,\beta x+P^{(2)}(x)sin\,\beta x\right]$, де $P^{(1)}(x)$ і $P^{(2)}(x)$ – многочлени, степені яких дорівнюють найвищому степеню многочленів $R_n(x)$ і $Q_m(x)$; число s може набувати двох значень:

1) $s=0$, якщо $\alpha\pm i\beta$ не є коренями характеристичного рівняння;

2) $s=1$, якщо $\alpha\pm i\beta$ є коренями характеристичного рівняння.

Приклад 32. Знайти загальний розв'язок рівнянь:

а) $y''+3y'+2y=0$; б) $y''-4y'+4y=0$; в) $y''+2y'+5y=0$.

Розв'язання. а) Складемо характеристичне рівняння $k^2+3k+2=0$. Знайдемо дискримінант $D=9-8=1$; і тоді корені $k_1=-2;$ $k_2=-1$ – дійсні й різні. Загальний розв'язок має вигляд: $\tilde{y}=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}$;

б) складемо характеристичне рівняння: $k^2-4k+4=0$. Оскільки $D=0$, то корені $k_1=k_2=2$ – однакові. Загальний розв'язок має вигляд: $\tilde{y}=(C_1+C_2x)e^{2x}$;

в) складемо характеристичне рівняння: $k^2+2k+5=0$.

Тоді $D=4-20=-16;$ $\sqrt{D}=\sqrt{-16}=4\sqrt{-1}=4i$, $k_1=\dfrac{-2-4i}{2}=-1-2i;$ $k_2=-1+2i$ – комплексні корені, причому $\alpha=-1,\ \beta=2$. В цьому випадку загальний розв'язок рівняння матиме такий вигляд: $\tilde{y}=e^{-x}\left(C_1\,cos\,2x+C_2\,sin\,2x\right)$.

Приклад 33. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''-2y'-3y=(x+2)\cdot e^{3x}$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку розв'язок однорідного рівняння $y''-2y'-3y=0$. Характеристичне рівняння $k^2-2k-3=0$ має корені $k_1=-1$ і $k_2=3$. Загальний розв'язок однорідного рівняння є $\tilde{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$.

Оскільки права частина має вигляд $f(x)=(x+2)e^{3x}$, де $P_1(x)=x+2$; $\alpha=k_2=3$, то $s=1$ і частинний розв'язок слід шукати у вигляді $y^*=x\cdot(Ax+B)\cdot e^{3x}$. Знайдемо $y^{*\prime}$ і $y^{*\prime\prime}$:

$$y^{*\prime}=\left[\left(Ax^2+Bx\right)e^{3x}\right]'=\left(2Ax+B\right)e^{3x}+3\left(Ax^2+Bx\right)e^{3x}=$$

$$=\left(2Ax+B+3Ax^2+3Bx\right)e^{3x}=\left(3Ax^2+2Ax+3Bx+B\right)e^{3x};$$

$$y^{*\prime\prime}=\left(6Ax+2A+3B\right)e^{3x}+3\left(3Ax^2+2Ax+3Bx+B\right)e^{3x}=$$

$$=\left(9Ax^2+12Ax+9Bx+2A+6B\right)e^{3x}.$$

Підставляємо y^*, $y^{*\prime}$ і $y^{*\prime\prime}$ в початкове рівняння, скоротивши на множник e^{3x}, звівши подібні множники і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях *x*, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження *A* і *B*: $Ax+\left(2A+6B\right)=x+2;$

$$x^1:\ 8A=1,\Rightarrow A=\frac{1}{8};$$

$$x^0:2A+4B=2;\ A+2B=1,\Rightarrow B=\frac{1-A}{2}=\frac{1-\frac{1}{8}}{2}=\frac{7}{16}.$$

Частинний розв'язок має вигляд: $y^*=x\left(\frac{1}{8}x+\frac{7}{16}\right)e^{3x}=\frac{1}{16}\left(2x^2+7x\right)e^{3x}$.

Таким чином, загальний розв'язок шуканого рівняння дорівнює:

$$y=\tilde{y}+y^*=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{16}\left(2x^2+7x\right)e^{3x}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

1) $y'=\frac{x^2+9}{y^2+1}$, $y(0)=1$

2) $y'=\frac{y}{x^2+1}$, $y(0)=1$.

3) $y'+2y=4e^{-2x}$, $y(1)=1$.

6) $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$, $y(1)=1$.

7) $\frac{dy}{dx}=x^2+3x$, $y(1)=5$.

8) $y'+5y=e^{-2x}$, $y(1)=1$.

4) $\left(1+y^2\right)dx - xydy = 0,\ y\left(1\right)=0.$

5) $xy' - y = x,\ y\left(1\right)=2.$

9) $y' = 2-\frac{y}{x},\ y\left(1\right)=1.$

10) $y' = 1+\frac{y}{x},\ y\left(0\right)=1.$

2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння і частинний розв’язок, що задовольняє початкові умови: $y = y_0$ при $x_0 = 0;$ $y' = y_0{}'$.

1. $y'' + 4y' + 4y = 2e^x;\ \ y\left(0\right) = -2,\ \ y'\left(0\right) = -2$.

2. $y'' - 5y' + 6y = 2cosx;\ \ y\left(0\right) = 3,\ \ y'\left(0\right) = \frac{1}{2}$.

3. $y'' - 2y' + 5y = x^2 + 1;\ \ y\left(0\right) = -3,\ \ y'\left(0\right) = -\frac{1}{5}$.

4. $y'' + 2y' - 8y = 3sin\,x;\ \ y\left(0\right) = -1,\ \ y'\left(0\right) = -\frac{3}{2}$.

5. $y'' - 6y' + 9y = cos\,2x;\ \ y\left(0\right) = 2,\ \ y'\left(0\right) = \frac{1}{3}$.

6. $y'' - 4y' + 5y = 2e^{3x};\ \ y\left(0\right) = 2,\ \ y'\left(0\right) = -\frac{3}{4}$.

7. $y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x};\ \ y\left(0\right) = 2,\ \ y'\left(0\right) = -1$.

8. $y'' - 4y' + 4y = -x^2 + 3x;\ \ y\left(0\right) = 3,\ \ y'\left(0\right) = -\frac{4}{3}$.

9. $y'' + 2y' + 10y = -sin\,2x;\ \ y\left(0\right) = 0,\ \ y'\left(0\right) = \frac{3}{4}$.

10. $y'' + y' - 6y = x^2 - 1;\ \ y\left(0\right) = 0,\ \ y'\left(0\right) = 1$.

РОЗДІЛ VIII. РЯДИ

Тема 23. Числові ряди, їх збіжність

Методичні поради до вивчення теми

Слід розглянути теоретичний матеріал з наступних питань теми: основні поняття числових рядів; властивості збіжних рядів (теореми); ряд геометричної прогресії; ознаки збіжності знакододатних рядів; знакозмінні ряди, абсолютна та умовна збіжність; знакопочергові ряди, ознака Лейбніца.

Термінологічний словник ключових понять

Означення. ***Рядом*** називається сума нескінченої множини доданків

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots, \tag{1}$$

які є членами нескінченої послідовності $\{u_n\}$.

Символи $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ називаються ***членами ряду***. Вони можуть бути числами, функціями, матрицями і так далі, а відповідні ряди називаються числовими, функціональними, матричними і т. д.

Скорочено ряд позначають так: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Індекс, що стоїть біля кожного члена ряду, вказує його порядковий номер в ряді.

Член u_n, номер якого не зафіксований, називається ***загальним членом ряду***.

Сума перших *n* членів ряду $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ (2) називається частинною сумою ряду.

Оскільки ряд складається з нескінченної множини доданків, то послідовним їх додаванням суму ряду знайти не можна. Тому потрібно спеціально дати означення суми ряду.

Означення. Якщо в частинній сумі S_n збільшувати число доданків, то може зустрітися один із таких трьох випадків:

1. При необмеженому зростанні доданків частинна сума прямує до конкретної границі, яку ми позначимо буквою *S:* $\lim_{n \to \infty} S_n = S$. В цьому випадку ***ряд називається збіжним***, а число *S* приймається за суму ряду.

2. При необмеженому зростанні числа доданків у частинній сумі її границя прямує до $+\infty$ або $-\infty$. В цьому випадку ***ряд називається розбіжним***. Розбіжний ряд суми не має.

3. При необмеженому зростанні числа доданків у частинній сумі $\lim_{n \to \infty} S_n$ не існує. Такий ряд називають ***розбіжним***.

Отже, за суму ряду приймають $\lim_{n \to \infty} S_n = S$.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Основні властивості ряду

1. Якщо всі члени ряду (1) помножити на одне і те ж число $k \neq 0$, то ряд $ku_1 + ku_2 + ku_3 + \ldots + ku_n + \ldots = kS$ буде збіжним, якщо ряд (1) збіжний, і буде розбіжним, якщо ряд (1) розбіжний.

2. Якщо ряди $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ (3)

і $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \ldots + \vartheta_n + \ldots$ (4)

збіжні, то ряд, одержаний від почленного додавання або віднімання відповідних членів цих рядів, буде також збіжним. Його сума буде рівною $S_1 \pm S_2$, де S_1 – сума ряду (3), а S_2 – сума ряду (4).

3. Сума збіжного і розбіжного рядів є ряд розбіжний.
4. Сума двох розбіжних рядів може бути як збіжним, так і розбіжним рядом.
5. Добуток абсолютно збіжних рядів знаходять за такою формулою:

$$\left(u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots\right)\left(\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3+\ldots+\vartheta_n+\ldots\right)=u_1\vartheta_1+\left(u_1\vartheta_2+u_2\vartheta_1\right)+$$

$$+\left(u_1\vartheta_3+u_2\vartheta_2+u_3\vartheta_1\right)+\ldots+\left(u_1\vartheta_n+u_2\vartheta_{n-1}+u_3\vartheta_{n-2}+\ldots+u_n\vartheta_1\right)+\ldots$$

Достатні ознаки збіжності числових рядів з невід’ємними членами. Перша ознака порівняння рядів

Нехай задано два ряди з невід’ємними членами:

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots,\ u_n\geq 0; \qquad (5)$$

$$\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3+\ldots+\vartheta_n+\ldots,\ \vartheta_n\geq 0\,. \qquad (6)$$

Якщо $u_n \leq \vartheta_n$, починаючи з деякого номера *n*, то із збіжності ряду (6) випливає збіжність ряду (5), а із розбіжності ряду (5) випливає розбіжність ряду (6).

На практиці дуже часто користуються другою ознакою порівняння рядів. Якщо $u_n > 0\ i\ \vartheta_n > 0$ та існує $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\vartheta_n}=h$, де h – число, відмінне від нуля, то ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\vartheta_n$ поводяться себе однаково відносно збіжності (або обидва розбіжні, або обидва збіжні).

Поряд з ознакою порівняння, яка широко застосовується, використовують і інші ознаки. Зупинимося на деяких із них.

Ознака Даламбера

Якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q$, то при $q<1$ ряд збіжний, при $q>1$ – розбіжний, при $q=1$ ця ознака відповіді не дає.

Ознака Коші (радикальна ознака)

Якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$, то при $q<1$ ряд збіжний, при $q>1$ – розбіжний, при $q=1$ ознака відповіді не дає.

Інтегральна ознака Коші. Якщо $f(x)$ – неперервна додатня спадна функція на проміжку $[1;+\infty)$, то ряд $f(1)+f(2)+...+f(n)+...=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$, і інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ находяться однаково відносно збіжності.

Функціональні ряди

Нехай задана послідовність функцій $u_1(x), u_2(x), u_3(x), ...$, що мають спільну область визначення. Вираз, складений з цих функцій, $u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, називається функціональним рядом.

При кожному значенні x_0 із області визначення функціональний ряд перетворюється в числовий ряд. Якщо ряд збіжний у точці x_0, то x_0 називається точкою збіжності ряду. Множина всіх точок збіжності функціонального ряду називається областю збіжності ряду. Область збіжності функціонального ряду можна знайти, користуючись ознаками збіжності числових рядів.

Приклад 34. Знайти область збіжності функціонального ряду $e^{-x}+e^{-2x}+...+e^{-nx}+...=\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$.

Розв'язання. Використаємо радикальну ознаку Коші $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{-nx}} = e^{-x}$. При $x>0$ $e^{-x}<1$. Згідно з ознакою Коші ряд збіжний при $x \in (0;+\infty)$.

При $x=0$ маємо ряд $1+1+1+...$ – розбіжний.

При $x<0$ $e^{-nx}>1$ – ряд розбіжний.

Означення. Функціональний ряд $u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається рівномірно збіжним на інтервалі $(a;\, b)$, якщо його члени на цьому інтервалі не більші по абсолютній величині відповідних членів збіжного числового ряду з додатними членами.

Ряд $a_1+a_2+a_3+...+a_n+..., a_n \geq 0$ називається ***мажорантою*** даного функціонального ряду.

Тема 24. Степеневі ряди

Методичні поради до вивчення теми

Слід розглянути теоретичний матеріал з наступних питань теми: степеневий ряд, радіус збіжності, інтервал збіжності степеневого ряду.

Термінологічний словник ключових понять

Степеневим рядом називається ряд виду

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_n(x-a)^n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n ,$$

де a_n – числа, які називаються коефіцієнтами степеневого ряду. При $a = 0$ степеневий ряд має вид $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Цей ряд завжди збіжний при $x = 0$. Основна властивість степеневого ряду виражається теоремою Абеля: якщо степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ збіжний у точці x_0, то він збіжний і причому абсолютно для всіх *x*, що задовольняють нерівність $-|x_0| < x < |x_0|$. Якщо ж степеневий ряд розбіжний у точці $x = x_0$, то він розбіжний для всіх значень *x*, для яких $|x| > |x_0|$. Із теореми Абеля випливає, що існує інтервал $-R < x < R$, для всіх точок якого ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ збіжний, а при $|x| > R$ – розбіжний. Цей інтервал називають інтервалом збіжності, а число R називають радіусом збіжності степеневого ряду. На кінцях інтервалу $(x = \pm R)$ степеневий ряд досліджують окремо. Якщо $R = 0$, то степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ збігається лише в точці $x = 0$. Якщо $R = \infty$, то ряд збігається на всій допустимій області. Всі властивості ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ справедливі і для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$. Для відшукання інтервалу збіжності степеневого ряду можна використовувати достатні ознаки збіжності числових рядів. Використовуючи їх, члени ряду беруть по абсолютній величині. Слід відмітити таку важливу властивість ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$: цей ряд можна скільки завгодно раз інтегрувати і диференціювати в кожній точці $x \in (-R; R)$. Радіус збіжності можна знаходити за формулами: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Дослідити на збіжність функціональний ряд – означає знайти інтервал збіжності та дослідити його на кінцях інтервалу.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Приклад 35. Знайти область збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{n^2+1}=\frac{x}{2}+\frac{2x^2}{5}+\frac{3x^3}{10}+...+\frac{nx^n}{n^2+1}+...$$

Розв'язання. Знаходимо радіус збіжності цього ряду за формулою:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,\text{ де }a_n=\frac{n}{n^2+1}\text{ і }a_{n+1}=\frac{n+1}{(n+1)^2+1},$$

маємо: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left((n+1)^2+1\right)}{\left(n^2+1\right)\cdot(n+1)}\approx\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{n^3}=1.$

Отже, ряд збігається при всіх $x\in(-1;1)$. Досліджуємо збіжність ряду на кінцях цього інтервалу; при $x=1$ одержуємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}\approx\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+...+\frac{n}{n^2+1}+...$$

Відомо, що гармонічний ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\approx1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n}+...$ є розбіжним.

$\dfrac{n}{n^2+1}\geq\dfrac{n}{n^2+n^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n}$ за ознакою порівняння рядів і ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+1}$ не має кінцевої суми, він також є розбіжним рядом. Далі, при $x=-1$ маємо знакозмінний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(-1)}{n^2+1}=-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{3}{10}+...+\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+1}+...$$

Цей ряд такий, що $\dfrac{1}{2}>\dfrac{2}{5}>\dfrac{3}{10}>...$ і $\lim\limits_{n\to0}\dfrac{n}{n^2+1}=0$.

І тому, згідно з теоремою Лейбніца, такий ряд збігається, він має конкретну і кінцеву суму ($S=const$). Отже, досліджуваний степеневий ряд збігається при $x\in[-1;1)$.

Завдання для самостійної роботи

У завданнях необхідно:

а) дослідити числовий ряд на абсолютну збіжність;

б) знайти область збіжності степеневого ряду.

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{3^n(n-2)}(x-1)^n$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2}(x+1)^n$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{ln(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(n+4)}$.

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin\, n\alpha}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(2)^{n+1}(x+2)^n$.

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2^{n-1}}$.

Модуль II. Теорія імовірностей і математична статистика

РОЗДІЛ IX. ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Тема 25-26. Основні поняття теорії імовірностей. Класичне визначення ймовірності

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, що містить такі питання теми: подія, сумісні та несумісні події, елементи комбінаторики,класичне визначення ймовірності.

План практичного заняття

1. Елементи комбінаторики.
2. Класичне визначення ймовірності.

Термінологічний словник ключових понять

Комбінаторика – курс алгебри, що займається підрахунком кількості комбінацій розміщення різних предметів.

Сполуками або комбінаціями називають різні групи, утворені з елементів, які відрізняються самими елементами або порядком їх розташування.

Факторіал: $n! = n(n-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1.$ За означенням $0! = 1.$

Подія – всякий факт, який у результаті випробування може відбутись або не відбутись.

Несумісними називають події, якщо поява однієї з них виключає появу інших подій в одному і тому ж випробуванні.

Сумісними називаються події, якщо поява однієї з них не виключає можливості появи інших (не обов’язково одночасно).

Протилежними називаються дві несумісні події, які утворюють повну групу подій.

Елементарним наслідком називають кожен із можливих результатів випробування.

Перестановками називають сполуки з n елементів, що відрізняються лише порядком елементів. Кількість перестановок:

$$P_n = n!$$

Розміщенням з n до m елементів називають такі комбінації, які відрізняються або елементами (хоча б одним), або порядком їх розташування. Кількість розміщень:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Сполученням з n елементів до m елементів називають комбінації, що відрізняються одна від одної хоча б одним елементом. Число сполучень

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Класичне означення ймовірності

Ймовірністю події A називають відношення числа елементарних наслідків, які сприяють появі події A, до загального числа усіх єдиноможливих і рівноможливих елементарних наслідків:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

де m – кількість елементарних наслідків, що сприяють події A;
n – кількість усіх єдиноможливих і рівноможливих наслідків.

Ймовірність випадкової події є додатне число, що лежить між нулем і одиницею:

$$0 < P(A) < 1.$$

Ймовірність неможливої події дорівнює нулю:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

Ймовірність достовірної події дорівнює одиниці:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Основні теореми теорії імовірностей

Сумою декількох подій називають подію, яка полягає в появі хоча б однієї із цих подій.

Сумою $A+B$ двох подій A і B називають подію, що полягає в появі або події A, або події B, або обох цих подій.

Ймовірність суми двох несумісних подій A і B дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Випадкові події утворюють повну групу, якщо внаслідок випробування хоча б одна з них з’явиться обов’язково.

Сума ймовірностей повної групи випадкових подій $A_1, A_2, ..., A_n$ дорівнює одиниці:

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A)+P(\bar{A})=1.$$

Добутком декількох подій називають подію, яка полягає в сумісній появі всіх цих подій.

Добутком двох подій *A* і *B* називають подію *AB*, що полягає в сумісній появі цих подій.

Умовною ймовірністю $P_A(B)$ називають ймовірність події *B*, обчислену з урахуванням умови, що подія *A* вже настала.

Ймовірність добутку двох подій *A* і *B* дорівнює добутку ймовірності однієї із них на умовну ймовірність другої, обчислену за умови, що перша подія уже настала:

$$P(AB)=P(A)P_A(B)=P(B)P_B(A).$$

Для незалежних подій:

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

Ймовірність суми двох сумісних подій *A* і *B* дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Приклад 1. Ймовірність влучення в мішень першим стрілком дорівнює 0,8; другим – 0,7, третім – 0,9. Стрілки зробили по одному пострілу. Яка ймовірність того, що в мішень влучили: а) два стрілки; б) всі три стрілки; в) хоча б один стрілок.

Розв’язання. Введемо позначення: $p_1=0{,}8;\ p_2=0{,}7;\ p_3=0{,}9$.

Тоді ймовірність непопадання в мішень для першого стрілка становить $q_1=1-p_1=1-0{,}8=0{,}2$; для другого $q_2=1-p_2=1-0{,}7=0{,}3$; для третього $q_3=1-p_3=1-0{,}9=0{,}1$.

а) P («два стрілка влучили в мішень») $=0{,}8\cdot0{,}7\cdot0{,}1+0{,}8\cdot0{,}3\cdot0{,}9+$ $+0{,}2\cdot0{,}7\cdot0{,}9=0{,}056+0{,}216+0{,}126=0{,}398.$

б) Р («всі стрілки влучили в мішень») $=0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}9=0{,}504$.

в) Р («хоча б один стрілок влучив в мішень») $=1-0{,}2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}1=1-$ $-0{,}006=0{,}994$.

Завдання для самостійної роботи

1. Скількома способами з 8 кандидатів можна вибрати 3 чоловіка на три різні посади?
2. Скількома способами можна розсадити за круглим столом 6 чоловік?
3. Скількома способами з 15 робітників можна створити бригади по 5 чоловік у кожній?
4. У чемпіонаті країни по футболі беруть участь 18 команд, причому кожні дві команди зустрічаються 2 рази. Скільки матчів грається протягом сезону?
5. З 10 троянд і 8 георгінів потрібно скласти букет, що містить 2 троянди і 3 георгіна. Скільки можна скласти різних букетів?
6. У колоді 36 карт, з них 4 тузи. Скількома способами можна вибрати 6 карт так, щоб серед них було 2 тузи?
7. Скількома способами можна поставити на полку 10 різних книг?
8. Є чотири літери розрізної абетки А, О, М, Т. Яка ймовірність того, що при випадковому розкладанні цих літер отримаємо слово АТОМ? (1/24).
9. У коробці шість однакових занумерованих кубиків. Наудачу по одному витягають усі кубики з коробки. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих кубиків з'являться в зростаючому порядку. (1/720).
10. В урні 10 куль: 6 білих і 4 чорних. Вийняли дві кулі. Яка ймовірність того, що вони обидві білі. (1/3).
11. У цеху працюють шість чоловіків і чотири жінки. По табельних номерах навмання обрано 7 чоловік. Знайти імовірність того, що серед них виявиться 3 жінки. (1/2).
12. У лотереї з 25 квитків 4 виграшних. Яка імовірність того, що серед перших трьох навмання обраних квитків два виявляться виграшними? (63/1150)
13. Стрілок стріляє по мішені, яка розділена на дві області. Імовірність попадання у першу область дорівнює 0,45, у другу – 0,35. Знайти імовірність того, що стрілок при одному пострілі попаде або у першу, або у другу область.
14. В урні 10 білих, 15 чорних, 20 синіх та 25 червоних кульок. Вийняли одну кульку. Яка імовірність того, що вона виявиться чорною?
15. У першій урні знаходяться 4 білих та 8 чорних кульок, у другій – 3 білих та 9 чорних. Із кожної урни вийняли по кульці. Знайти імовірність того, що вони обидві білі.
16. В урні 8 білих та 3 чорних кульки. Одну за одною виймають дві кульки. Яка імовірність того, що: 1) друга кулька виявиться чорною, якщо перша була біла; 2) обидві кульки чорні?
17. Студент розшукує необхідну формулу у трьох довідниках. Імовірності того, що ця формула є у першому, другому, третьому довідниках дорівнюють відповідно 0,6, 0,7, 0,8. Знайти імовірність того, що формула є:

а) лише в одному довіднику; б) лише у двох довідниках; в) у трьох довідниках.

Питання для самоконтролю

1.Випадкові події, вірогідна і неможлива події.
2.Повна група подій, протилежні події.
3.Сума і добуток випадкових подій.
4. Класичне визначення ймовірності.

Література:

Тема 27.Формула повної імовірності. Формула Байєса

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, що містить такі питання теми: формула повної ймовірності, формула Байєса.

План практичного заняття

1. Формула повної ймовірності.
2. Формула Байєса.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Ймовірність події A, яка може з'явитися лише за умови появи однієї із несумісних подій $H_1, H_2, \ldots, H_n$, що утворюють повну групу, дорівнює сумі добутків імовірностей кожної із цих подій на відповідну умовну ймовірність події A.

$$P(A)=\sum P(H_n)P_{H_n}(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+$$

$$+P(H_2)P_{H_2}(A)+\ldots+P(H_n)P_{H_n}(A),$$

де $P(H_i)$ – ймовірність гіпотези;

$P_{H_i}(A)$ – умовна ймовірність.

Формули Байєса

Формули Байєса дають можливість переоцінити ймовірності гіпотез після того, як стає відомим результат випробування, внаслідок якого з'явилась подія A: $$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)}.$$

Приклад 2. В магазин надходить продукція із трьох підприємств кількістю 20, 50, 30 виробів відповідно. Ймовірності виготовлення неякісного виробу для кожного підприємства відповідно дорівнюють 0,01;

0,04; 0,03. Навмання вибраний виріб виявився неякісним. Яка ймовірність того, що цей виріб належав другому підприємству?

Розв'язання. Подія A – вибрано неякісний виріб. Гіпотези H_1, H_2, H_3 – це вибір виробу із продукції відповідного підприємства. Ймовірності цих подій дорівнюють:

$$P(H_1)=\frac{20}{100}=0{,}2;\ P(H_2)=\frac{50}{100}=0{,}5;\ P(H_3)=\frac{30}{100}=0{,}3.$$

Використовуючи формулу повної ймовірності, знаходимо:

$$P(A)=0{,}2\cdot 0{,}01+0{,}5\cdot 0{,}04+0{,}3\cdot 0{,}03=0{,}031.$$

За формулами Байєса знаходимо умовну ймовірність:

$$P_A(H_2)=\frac{P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}02}{0{,}031}=\frac{20}{31}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. В першій урні 5 білих та 3 чорних кульки, в другій 7 білих та 4 чорних кульки. З першої в другу переклали кулю, колір якої невідомий. Після чого, з другої урни навмання беруть одну кулю. Яка ймовірність того, що вона біла.

2. На склад попадають деталі двох заводів , з першого –0,6% браку, з другого –0,8% браку. Знайти ймовірність попадання на склад бракованих деталей, якщо з першого заводу поступило 100 деталей, а з другого заводу – 200 деталей.

3. В урну , яка містить дві кулі, опустили білу кулю, після чого з урни навмання дістали одну кулю. Знайти ймовірність того, що дістали білу кулю, якщо припустити, що початковий склад кульок рівноможливий.

4. Сплав в болванках потрапляє з 3 заготівельних цехів. 60 штук з першого цеху, з другого та третього, відповідно в два і чотири рази більше, ніж з першого. При цьому матеріал першого цеху має 1% браку, другого – 2% браку, а третього –2,5% браку. Знайти ймовірність того, що навмання взята болванка буде без дефекту.

5. На трьох станках різної марки виготовляється певна деталь. Продуктивність I-го станка за зміну складає 50 деталей, II-го - 60 деталей, III-го – 45 деталей. При проведенні спеціальних випробувань на відповідність нормі виявлено, що 2%, 1%, 3% продукції цих станків, відповідно, мають скриті дефекти. В кінці зміни взята одна деталь: а) Яка ймовірність того, що вона стандартна? б) Взята деталь виявилась нестандартною. Яка ймовірність, що ця деталь виготовлена третім станком?

6. В робочий цех заводу поступають деталі з трьох автоматів. Перший автомат дає 3% браку, другий – 1 % і третій – 2%. Визначити ймовірність

попадання на зборку небракованої деталі, якщо з кожного автомата поступило відповідно 500, 200, 300 деталей.

7. В групі спортсменів 20 лижників, 6 велосипедистів і 4 бігуна. Ймовірність виконати кваліфікаційну норму для лижника – 0,9; для велосипедиста – 0,8; для бігуна – 0,75. Визваний навмання студент виконав кваліфікаційну норму. Яка ймовірність того, що цю норму виконав велосипедист?

8. При передаванні повідомлення сигналами азбуки Морзе сигнали "точка" і "тире" зустрічаються в співвідношенні 5:3. Статистичні властивості перешкод такі, що змінюють в середньому 1/25 частину сигналів "точка" і 1/30 частину сигналів "тире". Знайти ймовірність того, що довільно вибраний із прийнятих сигналів не змінений.

9. У місті конкурують дві будівельні фірми A і B, пропонуючи різні розцінки на свої послуги. Ймовірність укладання клієнтом контракту з фірмою A за наявністю конкуренції фірми B становить 0,2; а за відсутністю конкуренції ця ймовірність становить 0,35. З досвіду минулих років клієнт з ймовірністю 0,8 знає розцінки обох фірм.

а) Визначити ймовірність того, що фірма A укладе контракт з клієнтом.

б) Клієнт уклав контракт з фірмою A. Яка ймовірність того, що розцінки фірми B були відомі клієнтові?

Питання для самоконтролю

1.Формула повної ймовірності.

2.Формули Баєса.

Література:

Тема 28. Повторні незалежні випробування

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, що містить такі питання теми:

План практичного заняття

1. Формула Бернулі.
2. Локальна та інтегральна теореми Лапласа.
3. Формула Пуасона.

Термінологічний словник ключових понять

Формула Бернуллі

***Схема Бернулі*:** Нехай проводиться n незалежних випробувань, у кожному із яких подія A може з'явитись або не з'явитись; імовірність появи події A в усіх випробуваннях однакова (дорівнює p) і не залежить від появи або непояви A в інших випробуваннях; імовірність непояви події A в кожному випробуванні також постійна і дорівнює $q = 1 - p$.

Формула Бернуллі дає можливість знаходити ймовірність появи події A k разів при n ($n \le 20$) випробуваннях, які утворюють схему Бернуллі.

$$P_n(\kappa) = \frac{n!}{\kappa!(n-\kappa)!} \cdot p^{\kappa} \cdot q^{n-k}.$$

Локальною функцією Лапласа називають функцію виду

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}},$$

де $\varphi(x)$ – парна ($\varphi(-x) = \varphi(x)$), табульована для додатних x; $\varphi(x \ge 4) \approx 0$.

Інтегральною функцією Лапласа називають функцію

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

де $\Phi(x)$ – непарна ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$), табульована для додатних x; $\Phi(x \ge 5) \approx 0{,}5$.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Локальна теорема Лапласа

Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні постійна і $0 < p < 1$, то ймовірність $P_n(\kappa)$ того, що подія A настане в n випробуваннях рівно κ разів, наближено дорівнює

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \text{ де } x = \frac{\kappa - np}{\sqrt{npq}}.$$

Інтегральна теорема Лапласа

Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні постійна і $0 < p < 1$, то ймовірність $P_n(\kappa_1; \kappa_2)$ того, що подія A появиться в n випробуваннях від k_1 до k_2 раз, наближено дорівнює визначеному інтегралу

$$P_n(\kappa_1; \kappa_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

де $x'' = \dfrac{\kappa_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $x' = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$.

Асимптотична формула Пуассона

Якщо в схемі Бернулі n – велике, а ймовірність події p достатньо мала ($p \le 0{,}1;\ n \cdot p \cdot q \le 10$), то $P_n(k) \approx \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, де $\lambda = np$.

Найімовірнішим числом називають найбільш імовірне значення k_0 числа k появ події A.

Найімовірніше число k_0 визначається із подвійної нерівності:

$$np - q \le k_0 \le np + p\ .$$

Ймовірність того, що відхилення відносної частоти $\dfrac{m}{n}$ від постійної ймовірності p за абсолютною величиною не перевищує заданого числа $\varepsilon > 0$, наближено дорівнює значенню подвоєної функції Лапласа $\Phi(x)$, тобто

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi(x), \text{ де } x = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\ .$$

Приклад 3. Ймовірність присутності студента на лекції дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що із 100 студентів на лекції буде:
а) 75 студентів; б) не менше 90 студентів.

Розв'язання. а) за умовою $n = 100$, $p = 0{,}8$; $q = 0{,}2$; $k = 75$. Використовуємо локальну теорему Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \text{ де } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}\ .$$

Знайдемо значення x: $x = \dfrac{75 - 80}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \dfrac{-5}{4} = -1{,}25$.

За таблицею значень функції $\varphi(x)$ знаходимо $\varphi(1{,}25) = 0{,}1825$.

Оскільки $\varphi(-x) = \varphi(x)$, то $\varphi(-1{,}25) = 0{,}1825$. Шукана ймовірність

$$P_{100}(75) \approx \frac{0{,}1825}{4} \approx 0{,}046\,.$$

б) використовуємо інтегральну теорему Лапласа:

$$P_n\left(k_1;k_2\right)\approx\Phi\left(x''\right)-\Phi\left(x'\right),$$

де $x''=\dfrac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$; $x'=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$.

За умовою $k_1=90$, $k_2=100$. Знаходимо x' і x'':

$$x'=\frac{90-80}{4}=\frac{10}{4}=2{,}5;\quad x''=\frac{100-80}{4}=\frac{20}{4}=5.$$

За таблицею значень функції $\Phi\left(x\right)$ знаходимо $\Phi\left(2{,}5\right)=0{,}4938$; $\Phi\left(5\right)=0{,}49997$. Шукана ймовірність

$$P_{100}\left(90;\ 100\right)\approx0{,}499997-0{,}4938=0{,}006197.$$

Завдання для самостійної роботи

1. 30% виробів даного підприємства – вищого сорту. Яка ймовірність того, що із 6-ти виробів, виготовлених на даному підприємстві, чотири – вищого сорту?
2. В цеху знаходяться п’ять автоматів. Імовірність того, що кожний із них буде зупинено для заміни деталей, рівно 0,1. визначити імовірність того, що будуть зупинені:
   а) два автомати;
   б) не менше трьох автоматів;
   в) не більше двох;
   г) хоча б один автомат.
3. Імовірність схожості насіння пшениці складає 90%. Яка ймовірність того, що із семи насінин зійде не менше п’яти?
4. В деякій партії є 30% кольорових котушок ниток. Яка ймовірність того, що серед п’яти навмання взятих котушок ниток не більше трьох кольорових?

5. Знайти найбільш імовірне число справних радіоламп в партії із 25 штук, якщо відомо, що імовірність наявності пошкодженої радіолампи складає 0,1.
6. За даними технічного контролю в середньому 2% виготовлених на заводі годинників потребують додаткового регулювання. Яка імовірність того, що не будуть потребувати додаткового регулювання із 300 виготовлених годинників:
   а) 290 годинників;
   б) не менше 280?
7. В парку посадили 500 дерев. Імовірність прижитися в даних умовах 0,6. Яка кількість дерев, що прижилися, найбільш імовірна і яка імовірність, що саме така кількість дерев приживеться?

8. В партії змішано деталі двох сортів: 80% I сорту і 20% II сорту. Скільки деталей I сорту з імовірність 0,0967 можна чекати серед 100 навмання взятих деталей?

9. Завод сортового насіння випускає гібридне насіння кукурудзи. Відомо, що насіння першого сорту складає 95%. Визначити імовірність того, що із взятих на перевірку 200 насінин першого сорту буде:

а) 180 насінин;

б) менше 180 насінин;

в) більше 180 насінин?

10. На одному із факультетів інституту 0,4 числа всіх студентів займаються в спортивних секціях. Яке найбільш імовірне число студентів відвідують секції із 250 студентів другого курсу і яка ймовірність такого числа студентів?

Питання для самоконтролю

1.Схема повторних незалежних випробувань Бернуллі.

2.Формула Бернуллі. Найімовірніша кількість успіхів.

3.Теорема Бернуллі.

4.Локальна та інтегральна формула Муавра-Лапласа.

Література:

Тема 29. Дискретні випадкові величини

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, що містить такі питання теми: випадкова величина, дискретна випадкова величина, математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення.

План практичного заняття

1. Закони розподілу випадкових величин.
2. Числові характеристики випадкових величин.

Термінологічний словник ключових понять

Випадковою величиною називають таку величину, яка внаслідок випробування може прийняти лише одне числове значення, заздалегідь невідоме й обумовлене випадковими причинами.

Дискретною випадковою величиною (ДВВ) називають таку величину, яка може приймати відокремлені ізольовані одне від одного числові значення (їх можна пронумерувати) з відповідними ймовірностями.

Законом розподілу випадкової величини називають таке співвідношення, яке встановлює зв’язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм імовірностями.

Методичні рекомендації до вивчення теми

Закони розподілу та числові характеристики дискретних випадкових величин

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини *X* називають число, яке дорівнює сумі добутків усіх можливих значень *X* на відповідні їм імовірності:

$$M\left(X\right)=\sum_{\kappa=1}^{n}x_{\kappa}\cdot p_{\kappa}.$$

Дисперсією дискретної випадкової величини *X* називають число, яке дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення ДВВ *X* від її математичного сподівання:

$$D\left(X\right)=M\left(\left(X-M\left(X\right)\right)^{2}\right).$$

Формула для знаходження дисперсії: $D\left(X\right)=M\left(X^{2}\right)-\left(M\left(X\right)\right)^{2}$.

Середнє квадратичне відхилення дорівнює квадратному кореню з дисперсії і позначається $\sigma\left(X\right)=\sqrt{D\left(X\right)}$.

Біноміальний закон розподілу має вигляд: $P\left(X=m\right)= \;=C_{n}^{m}p^{m}\left(1-p\right)^{n-m}$, $m=0,1,2,...,n$ і використовується у схемі Бернуллі, тобто у випадку *n* незалежних повторних випробувань, в кожному з яких деяка подія з’являється з імовірністю *p*.

Геометричний розподіл має вигляд:

$$P\left(X=m\right)=pq^{m-1},$$

де $p=p\left(A\right)$ – імовірність появи події *A* в кожному випробуванні, $q=1-p$, *X* – кількість випробувань до появи події *A* в серії незалежних повторних випробувань.

Завдання для самостійної роботи

1. Прилад складається з трьох незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного елемента в одному досліді дорівнює 0,2. Скласти закон розподілу числа відмовивши елементів в одному досліді. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

2. Знайти математичне сподівання ДВВ *X*, заданої законом розподілу:

а)

X	-4	6	10
p	0,2	?	0,5

б)

X	0,21	0,54	0,61
p	0,1	0,5	?

3. Знайти математичне сподівання ДВВ *Z*, якщо відомі математичні сподівання *X* і *Y*:

а) $Z=X+2Y$, $M(X)=5$, $M(Y)=3$;

б) $Z=3X+4Y$, $M(X)=2$, $M(Y)=6$.

4. Знайти дисперсію та середнє квадратичне відхилення ДВВ X, заданої законом розподілу:

X	-5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

5. Випадкові величини X та Y незалежні. Знайти дисперсію випадкової величини $Z=3X+2Y$, якщо відомо, що $D(X)=5$, $D(Y)=6$.

6. Ймовірність виявити бракований виріб у партії з 10000 одиниць продукції м'ясокомбінату дорівнює 0,005. Знайти математичне сподівання та дисперсію ДВВ X – числа бракованих виробів у партії м'ясних консервів.

7. Нехай відомі таблиці розподілу випадкового числа очок кожного з двох стрільців, що змагалися

X_1	1	2	3
P	0,3	0,2	0,5

X_2	1	2	3
P	0,1	0,6	0,3

Порівняти результати стрільби.

Питання для самоконтролю

1.Дискретні випадкові величини. Закон розподілу ймовірностей, способи його завдання.

2.Математичне сподівання, його властивості.

3.Дисперсія, її властивості. Стандартне відхилення.

Література:

Тема 30-32.Функції і щільності розподілу ймовірностей неперервних випадкових величин

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, що містить такі питання теми: неперервні випадкові величини, інтегральна та диференціальна функції розподілу та їх числові характеристики.

План практичного заняття

1. Інтегральна функцією розподілу.
2. Інтегральною функцією розподілу.
3. Числові характеристики НВВ.
4. Рівномірний, показниковий та нормальний закони розподілу ймовірностей.

Термінологічний словник ключових понять

Неперервною випадковою величиною (НВВ) називають величину, яка може приймати будь-яке значення з деякого скінченого або нескінченого інтервалу $(a,\ b)$. Кількість можливих значень такої величини є нескінченною.

Інтегральною функцією розподілу (функцією розподілу) називають імовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менше за x:

$$F(x)=P(X<x).$$

Диференціальною функцією розподілу або щільністю ймовірностей неперервної випадкової величини називають похідну першого порядку від її інтегральної функції розподілу і позначають $f(x)=F'(x)$.

Математичне сподівання неперервної випадкової величини, яка приймає значення з відрізка $[a,\ b]$ та має щільність імовірності $f(x)$, знаходиться за формулою $M(X)=\int_a^b x\cdot f(x)dx$.

Дисперсія НВВ X визначається як $M\left[\left(X-M(X)\right)^2\right]$ і обчислюється за формулою:

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-\left[M(X)\right]^2 .$$

Середнє квадратичне відхилення НВВ визначається та обчислюється так: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Величина X розподілена рівномірно у проміжку $(a,\ b)$, якщо всі її можливі значення належать цьому проміжку і щільність її ймовірностей у цьому проміжку постійна, тобто

$$f(x)=\begin{cases} C=\dfrac{1}{b-a} \ \ при \ \ x\in(a,b) \\ 0, при\ x\notin(a,b) \end{cases}$$

Числові характеристики рівномірно розподіленої НВВ:

$$M(X)=\frac{b+a}{2} \quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12} \quad \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Випадкову величину X називають розподіленою за показниковим законом, якщо щільність її імовірностей має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x},\ при\ x\geq 0 \\ 0,\ при\ x<0 \end{cases}$$

де $\lambda>0$ – параметр.

Числові характеристики НВВ розподіленої за показниковим законом:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda};\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2};\ \ \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

Випадкову величину X називають розподіленою нормально, якщо щільність її імовірностей має вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де a та σ – параметри розподілу.

Модою $M_0(X)$ називають таке можливе значення X, при якому щільність розподілу набуває максимуму.

Медіаною $M_e(X)$ називають таке можливе значення X, при якому ордината $f(x)$ ділить пополам площу, обмежену кривою розподілу.

Ймовірність попадання неперервної випадкової величини в заданий інтервал $(a;\ b)$ знаходиться за формулою:

$$P\left(a < X < b\right) = \int_a^b f\left(x\right) dx,$$

де $f\left(x\right)$ – диференціальна функція розподілу неперервної випадкової величини.

Ймовірність попадання в заданий інтервал нормально розподіленої випадкової величини X дорівнює

$$P\left(\alpha < X < b\right) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Ймовірність заданого відхилення для нормально розподіленої випадкової величини X знаходиться за формулою

$$P\left(\left|X - a\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Приклад 4. Можна вважати, що значення електричного опору елемента мають нормальний розподіл і зосереджені на інтервалі (2,72; 2,84). Елемент вважається відмінної якості, якщо його опір не менше 2,75 і не більше 2,8. Знайти відсоток опорів відмінної якості серед усіх виготовлених.

Розв'язання. За правилом трьох сигм практично вірогідно, що відхилення нормальної випадкової величини від її середнього значення не перевищить трьох стандартних відхилень. Тому можна вважати $6\sigma = 2{,}84 - 2{,}72$, звідки $\sigma = 0{,}02$. Також можна вважати, що середнє значення опору дорівнює середині інтервалу можливих значень: $\mu = \frac{2{,}72 + 2{,}84}{2} = 2{,}78$. Для нормальної випадкової величини ймовірність попадання в заданий інтервал можна знайти за формулою

$$P\left(\alpha < X < \beta\right) = \Phi\left(\frac{\beta - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right).$$

Тоді ймовірність опору відмінної якості дорівнює

$$P\left(2{,}75 < X < 2{,}8\right) = \Phi\left(\frac{2{,}8 - 2{,}78}{0{,}02}\right) - \Phi\left(\frac{2{,}75 - 2{,}78}{0{,}02}\right) =$$

$$= \Phi\left(1\right) - \Phi\left(-1{,}5\right) = 0{,}3413 + 0{,}4332 = 0{,}7745.$$

Отже, опорів відмінної якості серед усіх виготовлених приблизно 77,5 %.

Приклад 5. Знайти числові характеристики випадкової величини *X*, заданої функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ \dfrac{x^2}{25},\ 0<x<5\\ 1,\ x\ge 5\end{cases}$$

Розв’язання. Знайдемо диференціальну функцію розподілу $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x<0\\ \dfrac{2}{25}x,\ 0\le x\le 5\\ 0,\ x>5\end{cases}$$

За формулою $M(X)=\int_a^b x\cdot f(x)dx$ знаходимо математичне сподівання:

$$M(X)=\int_0^5 x\cdot\frac{2x}{25}dx=\frac{2}{25}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^5=\frac{2}{25}\left(\frac{5^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)=\frac{10}{3}.$$

Дисперсію знаходимо за формулою $D(X)=\int_a^b x^2\cdot f(x)dx-M^2(X)$, тобто

$$D(X)=\int_0^5 x^2\cdot\frac{2x}{25}dx-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{2}{25}\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^5-\frac{100}{9}=\frac{25}{18}.$$

Середнє квадратичне відхилення дорівнює

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{25}{18}}\approx 1{,}17\ .$$

Завдання для самостійної роботи

1. Випадкова величина Х розподілена рівномірно на відрізку [*а*, *в*]. Знайти її функції щільності та розподілу ймовірності, знайти математичне сподівання та дисперсію, якщо задано відрізки: а) [-3, 7]; б) [1, 5].

2. Для нормально розподіленої випадкової величини Х знайти ймовірність попадання в інтервал:

а) (12, 14) якщо M(X)=10, D(X)=4; б) (15, 25) якщо M(X)=20, D(X)=5.

3. Знайти дисперсію та середнє квадратичне відхилення показникового розподілу, який заданий інтегральною функцією:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 1-e^{-0,4x}, & x\geq 0. \end{cases}$$

4. Неперервна величина X розподілена за показниковим законом, який заданий інтегральною функцією:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 1-e^{-0,6x}, & x\geq 0. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробувань випадкова величина попаде в інтервал (2;5).

5. Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом, заданим диференціальною функцією

$$f(x)=\begin{cases} 3e^{-3x}, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}.$$

Знайти ймовірність того, що X потрапить в інтервал: а) (0,13; 0,7); б) (0,8;1,2).

6. Задані математичне сподівання a і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини *X*. Знайти ймовірність того, що X прийме значення, що належить інтервалу (α, β):

а). $a = 16$, $\sigma = 2$, $\alpha = 9$, $\beta = 19$.

б). $a = 17$, $\sigma = 4$, $\alpha = 10$, $\beta = 20$.

Питання для самоконтролю

1. Функція розподілу випадкової величини, її властивості.
2. Неперервні випадкові величини. Щільність розподілу, її властивості.
3. Біноміальний, рівномірний, показниковий, нормальний розподіли, їх числові характеристики.

Література:

Тема 33. Закон великих чисел і центральна гранична теорема

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, що містить такі питання теми: нерівність Чебишева.

Термінологічний словник ключових понять

Нерівність Чебишева: ймовірність того, що відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання по абсолютній величині менше додатного числа ε, не менше, ніж $1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Теорема Чебишева: якщо $X_1, X_2, ..., X_n$ – попарно незалежні випадкові величини, причому дисперсії їх рівномірно обмежені (не перевищують постійного числа C) то, яким би малим не було додатнє число ε, ймовірність нерівності

$$\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon$$

буде як завгодно близько до одиниці, якщо число випадкових величин достатньо велике.

Теорема Бернуллі: якщо в кожному із n незалежних випробувань імовірність p появи події A постійна, то як завгодно близька до одиниці ймовірність того, що відхилення відносної частоти від імовірності p за абсолютною величиною буде достатньо малим, якщо число випробувань достатньо велике.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1,$$

де ε – як завгодно мале додатнє число.

Теорема Ляпунова (центральна гранична теорема): якщо випадкова величина X є сумою великого числа взаємонезалежних випадкових величин, вплив кожної із яких на всю суму значно малий, то X має розподіл, близький до нормального.

Тема 34. Основні поняття математичної статистики: вибіркові спостереження та вибіркові оцінки

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, що містить такі питання теми: вибіркова, генеральна сукупність, мода, медіана, відносна частота, гістограма, полігон, емпірична функція.

План практичного заняття

1. Полігон, гістограма.
2. Емпірична функція розподілу.
3. Числові характеристики вибірки.
4. Метод добутків.

Термінологічний словник ключових понять

Генеральна сукупність – множина всіх однорідних об'єктів, які вивчають відносно якісної або кількісної ознаки X.

Вибіркова сукупність або вибірка – об'єкти, які випадково вибрані з генеральної сукупності для дослідження.

Об'єм генеральної сукупності N – число об'єктів генеральної сукупності. Аналогічно n – об'єм вибірки.

Варіанти ознаки X – це значення ознаки: $x_1, x_2, ..., x_k$.

Частота n_i – число спостережень значення ознаки x_i.

Відносною частотою варіанти x_k називається відношення частоти n_k варіанти x_k до об'єму вибірки n і позначається ω_k.

$$\omega_k = \frac{n_k}{n}; \sum_{k=1}^{m} \omega_k = 1.$$

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Статистичний розподіл вибірки встановлює зв'язок між рядом варіант, що зростає або спадає, і відповідними частотами.

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k.$$

Якщо кількість різних варіант велика, то складають інтервальний варіаційний ряд. Для цього інтервал значень варіаційного ряду (x_{min}, x_{max}) розбивають на m інтервалів однакової довжини $h = \frac{(x_{max} - x_{min})}{m}$.

Для вибірки з неперервної генеральної сукупності складають тільки інтервальний варіаційний ряд.

Модою M_0 називають варіанту, яка має найбільшу частоту.

Медіаною m_e називають варіанту, яка ділить варіаційний ряд на дві частини, які мають однакову кількість варіант.

Якщо кількість варіант – непарне число, тобто $n = 2k + 1$, то $m_e = x_{k+1}$. Якщо $n = 2k$, то $m_e = \frac{(x_k + x_{k+1})}{2}$.

Графічні зображення статистичних розподілів

Полігон частот – це ламана, відрізки якої з'єднують точки з координатами: $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \ ..., (x_k, n_k)$.

Гістограма частот (будується для інтервальних варіаційних рядів) – це східчаста фігура, що складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали варіант довжиною $h = x_к - x_{к-1}$, а висоти дорівнюють – щільності частоти – $\frac{n_к}{(h)}$.

Емпірична функція розподілу (або функція розподілу вибірки) – це функція $F^*(x)$, яка визначає для кожного значення x частість події $X < x$ і обчислюється за формулою $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, де n_x – кількість варіант менших за X; n – об'єм вибірки.

Приклад 6. Побудувати емпіричну функцію за даним розподілом вибірки:

x_i	3	5	12
y_i	4	6	10

Розв'язання. Об'єм вибірки $n = 4 + 6 + 10 = 20$.

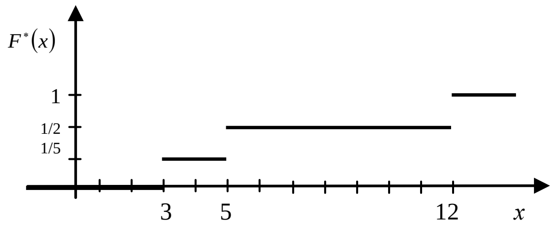
Найменша варіанта $x = 3$, отже, $F^*(X) = 0$ при $x \le 3$.

Значення $x < 5$ спостерігається 4 рази, отже, $F^*(X) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ при $3 < x \le 5$.

$x < 12$ спостерігається $4 + 6 = 10$ разів, отже, $F^*(X) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ при $5 < x \le 12$.

Оскільки $x = 12$ найбільша варіанта, то $F^*(X) = 1$ при $x > 12$. Таким чином емпірична функція має вигляд:

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, \quad x \le 3 \\ \dfrac{1}{5}, \ 3 < x \le 5 \\ \dfrac{1}{2}, \quad 5 < x \le 12 \\ 1, \quad\ \ x > 12 \end{cases}$$



Числові характеристики вибірки

1. Вибіркова середня – $\bar{x}_B$: $\bar{x}_B = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} n_k \cdot x_k$.

2. Вибіркова дисперсія – D_B: $D_B = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} n_k \left(x_k - \bar{x}_B\right)^2$.

Для обчислення дисперсії застосовують формулу $D(x) = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$, де $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} n_k \cdot x_k$; $\overline{x^2} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} n_k \cdot x_k{}^2$.

3. Вибіркове середнє квадратичне відхилення або вибіркове стандартне відхилення – σ_B: $\sigma_B = \sqrt{D_B}$.

Метод добутків для обчислення характеристик вибірки з рівновіддаленими варіантами

Рівновіддаленими варіантами називають арифметичну прогресію з різницею h (h – крок).

Умовними варіантами називають варіанти, які визначаються за формулою $u_i = \dfrac{x_i - C}{h}$, де С – уявний нуль (варіанта з найбільшою частотою); h – довжина інтервалів.

Умовні моменти першого і другого порядку:

$$M_1^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\kappa} n_i u_i \, , \ M_2^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i u_i{}^2 \, .$$

Тоді $\overline{X_B} = M_1^{*} h + C$, $D_B = \left(M_2^* - \left(M_1^*\right)^2\right) h^2$.

Приклад 7. Для даної вибірки обчислити методом добутків вибіркову середню, вибіркову дисперсію.

x_i	55,5	58,5	61,5	64,5	67,5	70,5	73,5	76,5	79,5
n_i	5	6	11	9	20	16	6	3	2

Розв'язання. Оскільки варіанти рівновіддалені із кроком $h = 3$, то для обчислення вибіркових числових характеристик можна застосувати метод добутків. Складемо розрахункову таблицю, де за уявний нуль обрано варіанту $C = 67{,}5$; яка розташована посередині варіаційного ряду

x_i	n_i	u_i	$u_i n_i$	$u_i^2 n_i$
55,5	5	–4	–20	80
58,5	6	–3	–18	54
61,5	11	–2	–22	44
64,5	9	–1	–9	9
67,5	20	0	0	0
70,5	16	1	20	20
73,5	6	2	12	24
76,5	3	3	9	27
79,5	2	4	8	32
Σ	78		–24	286

Обчислимо умовні моменти першого та другого порядку:

$$M_1^* = \frac{\sum u_i n_i}{n} = \frac{-20}{78} = -0{,}26; \quad M_2^* = \frac{\sum u_i^2 n_i}{n} = \frac{290}{78} = 3{,}72.$$

Тоді вибіркове середнє становитиме:

$$\overline{x} = M_1^* h + C = -0{,}26 \cdot 3 + 67{,}5 = 66{,}7,$$

а вибіркова дисперсія $$D_в = \left(M_2^* - \left(M_1^*\right)^2\right)h^2 = \left(3{,}72 - \left(-0{,}26\right)^2\right)3^2 = 32{,}87.$$

Питання для самоконтролю

1. Генеральна сукупність і вибірка з неї.
2. Варіаційний ряд вибірки. Статистичні розподіли вибірки.
3. Емпірична функція розподілу
4. Вибіркова середня та вибіркова дисперсія, їх властивості.

Література:

Тема 35. Інтервальні оцінки параметрів генеральних сукупностей

Методичні поради до вивчення теми

Слід розглянути теоретичний матеріал з наступних питань теми: довірчі інтервали для оцінки математичного сподівання та середньоквадратичного відхилення.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Довірчі інтервали

Якщо об'єм вибірки малий, то точкові оцінки можуть давати значні похибки, тому вводять інтервальні оцінки.

Інтервальною називається оцінка параметрів розподілу, яка визначається двома числами – кінцями інтервалу.

Довірчим називають інтервал $\left(\Theta^* - \delta;\ \Theta^* + \delta\right)$, який покриває невідомий параметр Θ із заданою надійністю γ.

Довірчі інтервали для оцінки математичного сподівання а нормально розподіленої кількісної ознаки *X* генеральної сукупності по вибірковій середній $\bar{x}_B$

а) При відомому середньоквадратичному відхиленню σ:

$$\bar{x}_B - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

де $t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \delta$ – точність оцінки;

n – об'єм вибірки;

t – це таке значення аргументу функції Лапласа $\Phi(t)$ (значення береться із таблиці), для якого $\Phi(t) = \gamma/2$;

б) при невідомому σ:

$$\bar{x}_B - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}},$$

де *S* – виправлене середнє квадратичне відхилення;

t_γ знаходять з таблиці за заданими *n* і *γ*.

Приклад 8. Знайти довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання *a* з надійністю 0,95. Задані середнє квадратичне відхилення $\sigma = 5$ нормально розподіленої випадкової величини *X*, вибіркова середня $\bar{x}_B = 14$, об'єм вибірки $n = 25$.

Розв'язування. Скористаємось формулою $\bar{x}_B - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Всі величини нам відомі, крім *t*. Щоб знайти *t*, скористаємось співвідношенням $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$. $\Phi(t) = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$. Використовуючи таблицю для інтегральної функції Лапласа, отримаємо $t = 1{,}96$. Підставляємо значення в нашу формулу:

$$14 - 1{,}96\frac{5}{\sqrt{25}} < a < 14 + 1{,}96\frac{5}{\sqrt{25}}.$$

Отже, довірчий інтервал буде $12{,}04 < a < 15{,}96$.

Довірчі інтервали для оцінки середнього квадратичного відхилення σ нормально розподіленої кількісної ознаки X з надійністю γ за виправленим вибірковим середнім квадратичним відхиленням S

$$S(1-q) < \sigma < S(1+q) \text{ (для } q<1\text{)},$$

$$0 < \sigma < S(1+q) \text{ (для } q>1\text{)},$$

де q знаходимо з таблиці за відомими n і γ.

Нехай ознака X генеральної сукупності розподілена за нормальним законом з параметром σ. Якщо задані точність δ та надійність γ, то об'єм можна обчислити за формулою:

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}.$$

Приклад 9. Випадкова величина розподілена за нормальним законом з параметром $s = 0{,}5$. Знайти мінімальний об'єм вибірки, щоб з надійністю $g = 0{,}95$ та точністю $d = 0{,}1$ виконувалася рівність $\overline{x}_B = a$.

Розв'язання. Для $\gamma = 0{,}95$ маємо $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow t = 1{,}96$. Знайдемо *n,* використовуючи формулу $n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$; $n = \left(\frac{1{,}96 \cdot 0{,}5}{0{,}1}\right)^2 = 96{,}04$.

Отже, мінімальний об'єм вибірки – $n = 97$.

Питання для самоконтролю

1.Інтервальні оцінки параметрів розподілу. Довірчий інтервал, його надійність.

2. Довірчий інтервал для генерального середнього при відомій дисперсії.

3. Довірчий інтервал для генерального середнього при невідомій дисперсії.

4. Довірчий інтервал для генеральної дисперсії.

Література:

Тема 36. Методи перевірки статистичних гіпотез

Методичні поради до вивчення теми

Слід розглянути теоретичний матеріал з наступних питань теми: основна гіпотеза, альтернативна гіпотеза.

Термінологічний словник ключових понять

Основною (нульовою) називається висунута гіпотеза і позначається H_0. ***Альтернативною*** (конкурентною) називається гіпотеза, що суперечить основній, її позначають H_1.

Якщо за висновком буде відкинута правильна гіпотеза H_0, то кажуть, що це похибка першого роду. Якщо за висновком буде прийнята неправильна гіпотеза H_0, то кажуть, що це похибка другого роду.

Імовірність здійснити похибку першого роду позначається α і називається рівнем значущості.

Статистичним критерієм узгодження перевірки гіпотези (або просто критерієм) називається випадкова величина K, розподіл якої відомий і яка застосовується для перевірки основної гіпотези.

Спостереженим значенням критерію узгодження називається значення відповідного критерію, обчислене за даними вибірки.

Критичними точками (межами) критерію K називаються точки $K_{кр.}$, які відокремлюють критичну область від області прийняття гіпотези.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Алгоритм перевірки гіпотези H_0 про рівність дисперсій двох нормальних сукупностей при альтернативній H_1: $D(X) > D(Y)$

а) Знайти спостережне значення критерію Фішера – Снедекора:

$$F_{сп} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

(відношення більшої виправленої дисперсії до меншої);

б) з таблиці критичних точок цього розподілу за заданим рівнем значущості α (для одностороньої області) та ступенями вільності $k_1 = n_1 - 1$ та $k_2 = n_2 - 1$ знайти $F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)$;

в) якщо $F_{сп.} < F_{кр.}$, то гіпотеза H_0 приймається;

якщо $F_{сп.} > F_{кр.}$, то H_0 відхиляють.

Приклад 10. За даними двох незалежних вибірок об’єму $n_1 = 11$ і $n_2 = 14$ із нормальних сукупностей X та Y знайдені виправлені вибіркові дисперсії

$S_1^2 = 0{,}76$ і $S_2^2 = 0{,}38$. При рівні значущості $a = 0{,}05$ перевірити гіпотезу $H_0:\ D(X) = D(Y)$ при альтернативній $H_1:\ D(X) > D(Y)$.

Розв'язання. Знайдемо відношення більшої виправленої дисперсії до меншої:

$$F_{сп.} = \frac{0{,}76}{0{,}38} = 2\,.$$

За умовою конкуруюча гіпотеза має вигляд $D(X) > D(Y)$, тому критична область – правостороння. По таблиці за рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ і числами ступеней вільності $k_1 = n_1 - 1 = 11 - 1 = 10$ та $k_2 = n_2 - 1 = 14 - 1 = 13$.

(k_1 – число ступеня вільності більшої виправленої дисперсії).

Знаходимо критичну точку $F_{кр.}(0{,}05;10;13) = 2{,}67$.

Оскільки $F_{сп.} < F_{кр.}$ – гіпотезу приймають.

Алгоритм перевірки гіпотези H_0 про рівність дисперсій двох нормальних сукупностей при альтернативній H_1: $D(X) \neq D(Y)$

а) Знайти спостережне значення критерію Фішера-Снедекора:

$$F_{сп.} = \frac{S_1^2}{S_2^2}\,.$$

(відношення більшої виправленої дисперсії до меншої);

б) з таблиці критичних точок цього розподілу за заданим рівнем значущості α (для двостороньої області) та ступенями вільності $k_1 = n_1 - 1$ та $k_2 = n_2 - 1$ знайти $F_{кр}(\alpha; k_1; k_2)$;

в) якщо $F_{сп.} < F_{кр.}$, то гіпотеза H_0 приймається; якщо $F_{сп.} > F_{кр.}$, то H_0 відхиляють.

Перевірка гіпотези про рівність двох середніх нормальних генеральних сукупностей, дисперсія яких невідома, але однакова

Потрібно перевірити нульову гіпотезу $H_0 : M(X) = M(У)$ при альтернативній $H_1 : M(X) \neq M(У)$:

а) обчислимо $T_{сп.} = \dfrac{\bar{X} - \bar{У}}{\sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)S_x^2 + (n_2 - 1)S_у^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}\,.$

Ця величина розподілена за законом Стьюдента з числом степеней вільності $\kappa = n_1 + n_2 - 2$;

б) знаходять t критичне для двостороньої критичної області $t_{кр.\ двост.}(\alpha;\kappa)$ з таблиці критичних точок розподілу Стьюдента;

в) якщо $|T| < t_{кр.}$, то гіпотезу H_0 не відхиляють, якщо $|T| > t_{кр.}$, то нульову гіпотезу відхиляють.

Знаходження теоретичних частот нормального розподілу. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності за критерієм узгодження Пірсона

1. Для вибірки, яка має статистичний розподіл об’єму n виду:

Варіанти x_k	x_1	x_2	...	x_m
Частоти n_k	n_1	n_2	...	n_m

теоретичні частоти обчислюють за формулою:

$$n'_k = \frac{h}{\sigma_B} \cdot \varphi(U_k) \cdot n,$$

де $h = x_{k+1} - x_k$; $U_k = \dfrac{x_k - \overline{x}_B}{\sigma_B}$; $\varphi(U)$ – локальна функція Лапласа, варіанти x_k рівновіддалені.

2. Для вибірки, яка має статистичний закон розподіл об’єму n виду:

Інтервали l_k	(x_1, x_2)	(x_2, x_3)	$\cdots$	(x_{m-1}, x_m)
Частоти n_κ	n_1	n_2	...	n_m

де $n_\kappa \geq 5$, теоретичні частоти обчислюють за формулою:

$$n'_k = \left(\Phi\left(\frac{x_{k+1} - \overline{x}_B}{\sigma_B} \right) - \Phi\left(\frac{x_k - \overline{x}_B}{\sigma_B} \right) \right) \cdot n ,$$

де $\Phi(U)$ – інтегральна функція Лапласа.

Ступінь вільності – $k = m - r - 1$, де m – кількість варіантів вибірки або часткових інтервалів варіант, r – число параметрів, оцінюваних за вибіркою. Для нормального розподілу $r = 2$ (оцінка a – вибіркова середня; оцінка σ – вибіркове середнє квадратичне відхилення).

Правило Пірсона

Щоб при заданому рівні значущості α перевірити основну гіпотезу H_0: генеральна сукупність розподілена нормально, необхідно а) обчислити теоретичні частоти n'_k для варіант вибірки;

б) обчислити спостережене значення критерію χ^2 (хі-квадрат) за формулою $\chi^2_{сп.} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\left(n_k - n'_k\right)^2}{n'_k}$;

в) знайти з таблиці значень функцій Фішера – Снедекора критичну точку $\chi^2_{кр.}$, яка відповідає рівню значущості α та степені вільності k; $\chi^2_{кр.} = \chi^2(\alpha, k)$;

г) порівняти $\chi^2_{сп.}$ та $\chi^2_{кр.}$ і зробити висновок:

якщо $\chi^2_{сп.} < \chi^2_{кр.}$, то гіпотезу H_0 треба прийняти;

якщо $\chi^2_{сп.} > \chi^2_{кр.}$, то гіпотезу H_0 треба відхилити.

Найчастіше рівень значущості приймають рівним 0,05 або 0,01. Якщо прийняти рівень значущості рівним 0,05, то це означає, що в п'яти випадках із 100 ми ризикуємо відкинути правильну гіпотезу.

Критерій Пірсона можна застосовувати при перевірці гіпотези не тільки про нормальний розподіл, але й будь-який. Для цього треба обчислити теоретичні частоти і степені вільності за формулами відповідно до розподілу, який перевіряється.

Лінійна регресія

Метод найменших квадратів

Метод найменших квадратів використовується для знаходження оцінок параметрів $a_1, a_2, ..., a_m$ функціональної залежності $У = f\left(x, a_1, a_2, ..., a_m\right)$ за даними вибірки.

Сутність методу. Якщо між випадковими величинами X і $У$ існує функціональна залежність $У = f\left(x, a_1, a_2, \ ..., a_m\right)$, то найімовірніші значення параметрів $a_1, a_2, ..., a_m$ повинні давати мінімум функції $S = \sum_{k=1}^{n} \left(y_k - f\left(x_k, a_1, a_2, ..., \ a_m\right)\right)^2$, (тобто сума квадратів відхилення емпіричної ординати $y_к$ від теоретичної ординати $f\left(x_к, a_1, a_2, ..., a_m\right)$ повинна бути найменшою), $x_к y_к$, $к = \overline{1,n}$ – варіанти ознак X і $У$.

Необхідною умовою існування мінімуму функції S є система рівнянь:

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0, k = \overline{1,m}.$$

Якщо між випадковими величинами X і $У$ існує лінійна функціональна залежність $У = aX + b,$ то параметри a і $в$ мають задовольняти систему рівнянь:

$$\begin{cases} a\sum_{\kappa=1}^{n} x_\kappa + nb = \sum_{\kappa=1}^{n} y_\kappa \\ a\sum_{\kappa=1}^{n} x^2{}_\kappa + b\sum x_\kappa = \sum_{\kappa=1}^{n} x_\kappa y_\kappa \end{cases}$$, яка випливає з системи $$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

На практиці параметри a і b зручно знаходити за формулами:

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x}^2 - \left(\overline{x}\right)^2},\ b = \overline{y} - a\overline{x},$$

де $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum x_i;\ \ \overline{y} = \dfrac{1}{n}\sum y_i,\ \ \overline{x}^2 = \dfrac{1}{n}\sum x_i^2;\ \ \overline{xy} = \dfrac{1}{n}\sum x_i y_i$.

Тісноту лінійного зв'язку між параметрами оцінюють за допомогою вибіркового коефіцієнта кореляції:

$r_в = \dfrac{\overline{xy} - \overline{x}\ \overline{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y},$ де $\sigma_x = \sqrt{\overline{x}^2 - \left(\overline{x}\right)^2};\ \sigma_y = \sqrt{\overline{y}^2 - \left(\overline{y}\right)^2};\ \overline{y}^2 = \dfrac{1}{n} y_i^2$.

Коефіцієнт кореляції задовольняє нерівність $|r| \le 1$. Якщо $r = 0,$ то величини $У$ і X незалежні. Якщо $r = \pm 1,$ то між величинами існує функціональна залежність.

Приклад 11. Нехай за п'ять років товарообіг деякого торговельного підприємства відповідно становить 2; 2; 3; 3; 4 млн грн. Скласти рівняння лінії регресії $y = k \cdot x + b$ та оцінити тісноту зв'язку за коефіцієнтом кореляції.

Розв'язання. Для розв'язку задачі складемо розрахункову таблицю.

	x	**y**	**xy**	**x²**	**y²**
	1	2	2	1	4
	2	2	4	4	4
	3	3	9	9	9
	4	3	12	16	9
	5	4	20	25	16
	15	14	47	55	42
Середнє значення	$\overline{x} = 3$	$\overline{y} = 2,8$	$\overline{xy} = 9,4$	$\overline{x}^2 = 11$	$\overline{y}^2 = 8,4$

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3;$$

$$\overline{y}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{2+2+3+3+4}{5}=2{,}8;$$

$$\overline{x^2}=\frac{\sum X_i^2}{n}=\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5}=11;$$

$$\overline{y^2}=\frac{\sum y_i^2}{n}=\frac{2^2+2^2+3^2+3^2+4^2}{5}=8{,}4;$$

$$\overline{xy}=\frac{\sum x_i y_i}{n}=\frac{1\cdot2+2\cdot2+3\cdot3+3\cdot4+4\cdot5}{5}=9{,}4.$$

Обчислимо параметри лінії регресії *k* і *b:*

$$k=\frac{\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x}^2-\left(\overline{x}\right)^2}=\frac{9{,}4-3\cdot2{,}8}{11-3^2}=\frac{1}{2}=0{,}5;\; b=\overline{y}-k\cdot\overline{x}=2{,}8-0{,}5\cdot3=1{,}3.$$

Отже, рівняння лінії регресії має вигляд: $\overline{y}_x=0{,}5\cdot x+1{,}3$.

Знайдемо коефіцієнт лінійної кореляції: $r=\dfrac{\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sigma_x\cdot\sigma_y}$,

де $\sigma_x=\sqrt{\overline{x}^2-\left(\overline{x}\right)^2}=\sqrt{11-3^2}=\sqrt{2}=1{,}4$; $\sigma_y=\sqrt{\overline{y}^2-\left(\overline{y}\right)^2}=\sqrt{8{,}4-\left(2{,}8\right)^2}=0{,}75;$

$$r=\frac{9{,}4-3\cdot2{,}8}{1{,}4\cdot0{,}75}=0{,}95.$$

Оскільки $r\approx 1$, то кореляційна залежність близька до функціональної.

Міра кореляційного зв'язку двох ознак

Нехай X і Y дві ознаки генеральної сукупності, зв'язок між якими треба вивчити. У результаті спостережень за генеральною сукупністю отримали n пар значень цих величин $\left(x_1,y_1\right),...,\left(x_n,y_n\right)$. За вибіркою обчислили вибіркові середні та дисперсії, які позначимо відповідно $\overline{x},\overline{y},S_x^2,S_y^2$. Якщо зміна ознаки X спричиняє зміну розподілу ознаки Y, яка виявляється в зміні її середнього значення, то кажуть, що між цими ознаками існує *кореляційний зв'язок*. Тіснота кореляційної залежності *У* від *X* оцінюється за величиною розсіювання значення *У* навколо умовного середнього $\overline{Y}$. За оцінку коефіцієнта кореляції $\rho=\rho\left(X,Y\right)$ візьмемо *вибірковий коефіцієнт кореляції* між розподілами вибірок $\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ і $\left(y_1,y_2,...,y_n\right)$

$$r=\frac{\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}}{S_xS_y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\cdot\overline{y}}{nS_xS_y}, \qquad (1)$$

при цьому кожній парі (x_i, y_i) приписуємо ймовірність $\frac{1}{n}$.

Якщо кількість спостережень n велике число, то для спрощення обчислень дані слід згрупувати. Нехай дані вже згруповано і виявилося, що пара чисел (x_i, y_j) спостерігалася n_{ij} разів.

Тоді згідно з формулою (1) маємо $r = \frac{\sum_{i,j} n_{ij} x_i y_j - n\overline{x} \cdot \overline{y}}{nS_x S_y}$.

Вибіркове рівняння лінійної регресії

Рівняння $y = f(x)$ *і* $x = \varphi(y)$, які виражають у загальному вигляді кореляційні залежності *У* на *Х* і *Х* на *У,* називаються кореляційними рівняннями (або рівняннями регресії) відповідно *У* на *Х* та *Х* на *У*, а графіки кореляційних рівнянь – кривими регресії відповідно *У* на *Х* та *Х* на *У*.

Будемо вважати, що генеральна сукупність має нормальний розподіл. Вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X має вигляд:

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r\frac{S_y}{S_x}(x - \overline{x}),$$

а прямої регресії X на Y $$\overline{x}_y - \overline{x} = r\frac{S_x}{S_y}(y - \overline{y}).$$

Рівняння прямих регресії доцільно знаходити лише в тому випадку, коли точки $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ групуються навколо деякої прямої.

Перевірка гіпотези про значущість коефіцієнта кореляції

Для перевірки гіпотези $H_0 : \rho = 0$ про рівність нулю коефіцієнта кореляції генеральної сукупності при альтернативній гіпотезі $H_1 : \rho \neq 0$ застосовують статистику $$T = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}},$$
яка має розподіл Ст'юдента з $k = n - 2$ степенями свободи, якщо правильна основна гіпотеза H_0. За вибіркою обчислюють фактичне значення статистики $T_{факт.}$, а за таблицею критичних точок розподілу Ст'юдента для заданого рівня значущості α знаходять двосторонню критичну точку $t_{кр.}$.

Критерій. Якщо $\left|T_{факт.}\right| > t_{кр.}$, то гіпотеза H_0 відхиляється, а якщо $\left|T_{факт.}\right| < t_{кр.}$, то кажуть, що немає підстав відхилити гіпотезу H_0.

Завдання для самостійної роботи

1. Для даної вибірки скласти статистичний розподіл. Побудувати полігон частот.
 4, 5, 7, 6, 9, 9, 8, 4, 4, 5, 6, 5, 7, 8, 4, 6, 7, 5, 6, 7, 6, 8, 8, 9, 6, 5, 8, 4, 6, 8.
 Знайти числові характеристики заданої вибірки $\bar{x}_B, D_B, \sigma_B$.
2. За даними вибірки побудувати гістограму.

$x_к$	4-8	8-12	12-16	16-20
$n_к$	4	10	12	3

3. Знайти емпіричну функцію заданого розподілу.

а)

$x_к$	2	5	7
$n_к$	2	15	3

б)

$x_к$	3	6	7	8	10
$n_к$	5	8	10	7	5

4. Знайти для заданого статистичного розподілу $\bar{x}_B, D_B, \sigma_B$.

$x_к$	1	3	6	26
$n_к$	8	40	10	2

5. Методом добутків за даними вибірки знайти $\bar{x}_B, D_B, \sigma_B$.

а)

$x_к$	145	149	153	157	161
$n_к$	8	15	25	7	5

б)

$x_к$	10	15	20	25	30
$n_к$	2	5	14	10	4

6. Методом найменших квадратів знайти рівняння прямої лінії регресії $y = ax + b$ та коефіцієнт кореляції r_B.

а)

x	1	3	4	6	7	8
y	1	1	2	2	4	5

б)

x	2	5	4	6	7	9	10
y	1	3	2	2	4	5	6

Питання для самоконтролю:

1.Критерій перевірки нульової гіпотези у дисперсійному аналізі.

2.Статистика критерію перевірки нульової гіпотези у дисперсійному аналізі.

3.Коефіцієнт кореляції, його властивості.

4.Вибіркове рівняння лінійної регресії.

5.Перевірка гіпотези про значущість коефіцієнта кореляції.

Література: