Модуль 3. Математичне програмування та дослідження операцій

РОЗДІЛ X. МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Тема 37-38. Предмет математичного програмування. Лінійне програмування

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, що містить такі питання теми: загальна постановка оптимізаційної задачі, її структура: цільова функція, обмеження як спосіб опису множини допустимих планів. Означення розв'язку цільової функції, точка екстремуму; проблема його пошуку. Геометричний метод розв'язування задач лінійного програмування. Правила переходу від загальної задачі лінійного програмування до канонічної та стандартної. Поняття опорного плану, теореми про існування опорного плану, оптимального опорного плану. Алгоритм графічного методу. Алгоритм симплекс-методу. Поняття про модифікований алгоритм симплекс-методу.

План практичного заняття

1. Побудова множини допустимих розв'язків системи обмежень.
2. Розв'язання задач лінійного програмування графічним методом.
3. Розв'язання задач лінійного програмування симплексним методом.
4. Розв'язання задач лінійного програмування М-методом.

Термінологічний словник ключових понять

Математичне програмування це математична дисципліна, яка займається вивченням екстремальних задач і розробкою методів їх розв'язання.

Математична модель (постановка) екстремальної задачі в загальному вигляді полягає у визначенні найбільшого або найменшого значення функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за умов $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$, де f і g_i - задані функції, а b_i - деякі дійсні числа.

Задачею лінійного програмування(ЛП) називається задача, якщо всі функції f і g_i лінійні.

Задачею нелінійного програмування називається задача, де хоча б одна з функцій f і g_i нелінійна.

Загальною задачею лінійного програмування називається задача, яка полягає у визначенні максимального(мінімального) значення функції

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

$$\text{За умов} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \left(i = \overline{1,k}\right) \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \left(i = \overline{k+1,m}\right) \qquad (3)$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,\ell}, \ \ \ell \le n\right) \qquad (4)$$

де – a_{ij}, b_i, c_j - постійні величини і $k \le m$.

Цільовою функцією (ЦФ) (або лінійною формою) називається функція (1) $F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, максимальне (мінімальне) значення якої необхідно знайти.

Стандартна (симетрична) форма задачі лінійного програмування це задача, яка складається у визначенні максимального значення цільової функції при виконанні умов (2) і (4), де $\kappa = m \, і \, \ell = n$

Канонічною (основною) задачею ЛП називається задача, яка складається в визначенні максимального значення цільової функції при виконанні умов (3) і (4), де $\kappa = 0 \, і \, \ell = n$.

Планом (або допустимим розв'язком) називається сукупність чисел $X = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, що задовольняють обмеження загальної задачі лінійного програмування (2) -(4).

Оптимальним планом називається такий план $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ при якому ЦФ набуває свого максимального (мінімального) значення.

Опорним рішенням (планом) задачі ЛП називається базисний невід'ємний розв'язок.

Системою обмежень називаються обмеження, які математично записуються у вигляді рівнянь або нерівностей(2)-(4).

Багатокутником планів завдання ЛП називається область на площині, яка задовольняє систему обмежень(2) при n=2.

Градієнтом функції називається вектор, що показує напрям найшвидшої зміни цільової функції.

Графічний метод застосовується для розв'язання задач лінійного програмування з двома змінними, заданими в неканонічній формі, і багатьма змінними в канонічній формі за умови, що вони містять не більше двох вільних змінних.

Симплексний метод розв'язання задачі ЛП заснований на переході від одного опорного плану до іншого, при якому значення цільової функції зростає (за умови, що це завдання має оптимальний план і кожен її опорний план є невиродженим). Вказаний перехід можливий, якщо відомо який-небудь початковий опорний план.

Невиродженим називається такий опорний план, що містить рівно m додатних компонентів, інакше він називається виродженим.

Симплексна таблиця має вигляд:

Б	$C_б$	P_0	c_1	c_2	$\cdots$	c_n
			P_1	P_2	$\cdots$	P_n
P_i	c_i	$в_i$	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...	...
$P_к$	$c_к$	$в_к$	$a_{к1}$	$a_{к2}$	...	$a_{кn}$
І.С.		F_0	Δ_1	Δ_2	$\cdots$	Δ_n

М-метод - метод штучного базису застосовується для задач лінійного програмування, що записані у формі основної задачі і мають опорні плани, де серед векторів P_j (у векторній формі) не завжди є m одиничних.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

1. Задачі лінійного програмування

Багато виробничих та економічних проблем пов'язані з оптимізацією (максимізацією або мінімізацією) функції при певних обмеженнях, що задаються у вигляді системи рівнянь або нерівностей.

Функція, яка оптимізується, називається **цільовою функцією**.

Прикладами цільових функцій є функція прибутку, функція витрат.

Система рівнянь або нерівностей утворює систему лінійних обмежень, при яких оптимізується цільова функція (наприклад, обмеження на ресурси, такі як матеріальні, трудові тощо) і істотно впливає на розв'язання задачі. Задачі подібного типу розв'язуються методами математичного програмування.

Зокрема, задачі, в яких цільова функція та система обмежень виражені лінійними рівняннями або нерівностями, розв'язуються методами лінійного програмування.

У загальному вигляді задача лінійного програмування може бути записана як математична модель, а саме:

Знайти максимальне (мінімальне) значення функції

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \text{при обмеженнях} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_i \le b_i \quad (i = \overline{1, k})$$

де $a_{j.i}$, b_i, c_j – будь-які дійсні числа, $x_i \ge 0$, $i = \overline{1, k}$.

2. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

Задачі лінійного програмування, які містять не більше двох змінних, мають просту геометричну інтерпретацію.

Розглянемо конкретну задачу лінійного програмування.

Приклад 44. Знайти максимальне значення функції $f = 3x_1 + 2x_2$

при обмеженнях $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$

$$x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0$$

Розв'язання. Система лінійних нерівностей визначає певну область *S*, показану на Рис. 4. Кожна точка цієї області може претендувати на розв'язання заданої проблеми і тому область *S* називається множиною допустимих розв'язків або багатокутником допустимих розв'язків.

Мета полягає у тому, щоб серед усіх допустимих точок множини *S* знайти точку або точки, що оптимізують (у нашому випадку максимізують) цільову функцію.

Такий допустимий розв'язок називають **оптимальним рішенням** заданої проблеми.

Розглянемо теорему лінійного програмування, на якій базується графічний метод розв'язування задач, і яка приводиться без доведення.

Теорема. Якщо задача лінійного програмування має оптимальне рішення, то воно графічно зображується кутовою точкою або вершиною багатокутника допустимих розв'язків, що відповідає системі нерівностей даної задачі. Більш того, якщо цільова функція f досягає оптимального значення у двох суміжних вершинах багатокутника (області *S*), тоді вона оптимізується у кожній точці, що належить відрізку, який з'єднує ці вершини. Отже, у цьому випадку існує нескінченна множина розв'язків задачі лінійного програмування.

Приведена теорема стверджує, що для знаходження оптимального розв'язку задачі лінійного програмування можна перевірити множину вершин багатокутника допустимих розв'язків і серед них вибрати ту, у якій цільова функція досягає найбільшого або найменшого значення.

Існує простий алгоритм знаходження розв'язків задач лінійного програмування графічним методом:

1. Побудувати область допустимих розв'язків даної задачі.

2. Побудувати вектор росту цільової функції $\overrightarrow{OP}$ (коефіцієнти цільової функції є координати цього вектора).

3. Присвоїти значення нуль цільовій функції f. Тоді цільова функція $f = 0$ матиме вигляд лінійного рівняння від двох змінних x_1 та x_2 і

зобразиться графіком прямої лінії $f = 0$ на координатній площині $x_1 0 x_2$. пряма лінія $f = 0$ – це лінія, графік якої проходить через початок координат, перпендикулярно вектору $\overrightarrow{OP}$

4. Рухаючись у напрямку вектора росту $\overrightarrow{OP}$, ми одержуємо множину паралельних прямих виду $f = C$, які перетинають область допустимих розв'язків. Для одержання оптимального розв'язку поставленої проблеми необхідно із множини паралельних прямих знайти таку пряму, що найдальше знаходиться від початку координат і перетинає область допустимих розв'язків тільки в кутовій точці.

Знайти вершину, в якій цільова функція досягає максимуму або мінімуму. Якщо існує тільки одна вершина, то поставлена задача має тільки одне оптимальне рішення. Якщо цільова функція оптимізується у двох суміжних вершинах області S, то існує безліч оптимальних розв'язків, які відповідають точкам, що лежать на відрізку, який з'єднує ці вершини.

Графічне зображення поставленої задачі представлено на Рис.20.

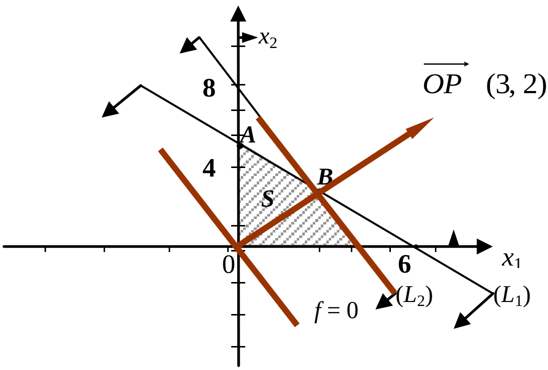


Рисунок 20

1. $L_1;\quad 2x_1 + 3x_2 = 12$
   $L_2;\quad 2x_1 + x_2 = 8$

Область S або $0ABC$ – область допустимих розв'язків.

2. $\overrightarrow{OP} = \{3;\, 2\}$

3. Точка B – точка, де цільова функція $f = 3x_1 + 2x_2$ досягає максимального значення. Знаходимо координати вершини B.

$$B = (L_1) \cap (L_2) \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 3;\ x_2 = 2. \quad B(3;\, 2)$$

У вершині $B(3;\, 2)$ цільова функція досягає максимального значення. Отже, $f = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 13$.

3.Симплекс-метод: Стандартна задача лінійного програмування та її максимізація

Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування не може бути використано, якщо система обмежень містить більш ніж дві змінні, і тому необхідні більш універсальні методи розв'язування таких задач.

Один із таких методів носить назву симплексного і базується на перетвореннях Жордано-Гаусса.

Розглянемо симплекс-метод для розв'язування задач лінійного програмування, які вважаються стандартними.

Стандартна форма запису задач лінійного програмування має деякі особливості, а саме:

1. Цільова функція максимізується.
2. На всі змінні, що входять у систему обмежень, накладається умова невід'ємності.
3. Кожне лінійне обмеження має вигляд лінійної нерівності змісту " $\le$ " з невід'ємною правою частиною.

Розглянемо стандартну задачу лінійного програмування.

Приклад 45. Знайти максимальне значення функції $f = 3x_1 + 2x_2$

при обмеженнях $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$

$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$

Розв'язання. По-перше, для розв'язання даної задачі симплекс-методом необхідно перетворити систему обмежень-нерівностей у систему рівнянь, що досягається використанням додаткових невід'ємних змінних. Додаючи додаткову невід'ємну змінну x_3 до лівої частини першої нерівності $2x_1 + 3x_2 \le 12$, одержуємо рівняння

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12.$$

Зауважимо, що додаткова змінна x_3 дорівнює різниці між лівою і правою частинами нерівності $2x_1 + 3x_2 \le 12$.

Аналогічно, нерівність $2x_1 + x_2 \le 8$ перетворюється у рівняння $2x_1 + x_2 + x_4 = 8$ введенням додаткової змінної x_4.

Отже, початкова система лінійних обмежень-нерівностей приведена до системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = \ \ 8 \end{cases}, \qquad \text{де} \quad x_i \ge 0;\ i = \overline{1,4}.$$

Нарешті, перепишемо цільову функцію у такій формі: $-3x_1 - 2x_2 - 0 \cdot x_3 - 0 \cdot x_4 + f = 0$. Зауважимо, що коефіцієнт біля f дорівнює $+1$. Одержимо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = \quad 8 \\ -3x_1 - 2x_2 + f = 0 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1{,}4}$$

Отже, задача лінійного програмування еквівалентна наступному: серед множини невід'ємних розв'язків системи лінійних рівнянь визначити такий розв'язок, при якому цільова функція f досягає максимального значення.

Запишемо розширену матрицю системи рівнянь:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & f \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Помічаємо, що кожний із x_3-x_4 – та f-стовпчиків розширеної матриці записаний в однаковій формі, тобто тільки один елемент у цих стовпчиках дорівнює 1, а всі інші елементи – нулі.

Змінні, що відповідають стовпчикам, записані у вигляді одиничних форм, називають базисними, а всі інші змінні – небазисними.

Початкова симплекс-таблиця, побудована на основі останньої системи рівнянь, має наступний вигляд:

Таблиця 1

Row	x_b	***c* (constant)**	x_1	x_2	x_3	x_4	f	
1	x_3	12	**2**	3	1	0	0	
2	x_4	**8**	**2**	**1**	**0**	**1**	**0**	**: 2**
0	f	0	**-3**	-2	0	0	1	

ведучий рядок

ведучий стовпчик

Одержуємо перший допустимий розв'язок покладаючи $x_1 = 0$ та $x_2 = 0$, тобто $\overrightarrow{X_1} = \{0{,}0{,}12{,}8\}$ та $f_1 = 0$.

Розв'язок, при якому небазисні змінні дорівнюють нулю, називають **базисним розв'язком**.

Перш ніж продовжити розв'язування даної задачі, розглянемо алгоритм симплексного методу:

1. Побудувати початкову симплекс-таблицю (на основі розширеної матриці).
2. Перевірити, чи досягнуто оптимальне рішення.

а) Якщо всі елементи останнього рядка симплекс-таблиці – невід'ємні, то оптимальне рішення задачі досягнуто. Переходимо до п. 4.

b) Якщо в останньому рядку симплекс-таблиці знайдеться хоча б одне від'ємне число, то оптимальне рішення задачі не досягнуто. Переходимо до п. 3.

3. Реалізувати наступні ітерації: визначити ведучий елемент і привести його до 1, розділивши, у разі необхідності, всі елементи ведучого рядка на ведучий елемент.
Використовуючи елементарні перетворення, привести ведучий стовпчик до одиничної форми. Для цього всі елементи ведучого рядка помножуються на відповідні множники і додаються до відповідних елементів всіх інших рядків. Повернутись до п. 2.

4. Визначити оптимальне рішення:

a) Якщо симплекс-таблиця не містить ідентичних стовпчиків в одиничній формі, то задача має єдиний розв'язок. Значення змінних, що знаходяться у стовпчику базисних змінних симплекс-таблиці, визначається відповідними числами стовпчика constant. Змінні, що не увійшли у стовпчик базисних, вважаються рівними нулю.

b) (Правило інтерпретації). Якщо два або більше одиничних стовпчики – ідентичні, то існує більше ніж одне рішення задачі. У цьому разі необхідно вибрати один із цих стовпчиків і реалізувати п. (a); вважаючи, що інші змінні (в ідентичних стовпчиках) дорівнюють нулю.

Продовжимо розв'язування нашої задачі згідно алгоритму симплекс-методу, починаючи з пункту 2.

2. Перевіримо, чи досягнуто оптимальне рішення.

Так як останній рядок симплекс-таблиці 1 містить від'ємні елементи, то одержаний розв'язок не є оптимальним. Переходимо до п. 3.

3. Виконаємо наступні ітерації, а саме:

Визначимо ведучий елемент:

a) Так як елемент (-3) в останньому рядку симплекс-таблиці 1 від'ємний і має найбільшу абсолютну величину, то стовпчик x_2 – ведучий стовпчик.

b) Розділимо кожен елемент стовпця вільних членів (constant) на додатні елементи ведучого стовпчика і серед одержаних відношень виберемо найменше. Маємо $\min\left\{\frac{12}{2};\frac{8}{2}\right\}=\frac{8}{2}$.

Бачимо, що відношення $\frac{8}{2}$ менше, ніж $\frac{12}{2}$, і тому другий рядок (x_4) у симплекс-таблиці і буде ведучим рядком.

Елемент 2, що лежить на перетині ведучого стовпчика і ведучого рядка, і буде ведучим елементом.

Далі, необхідно, щоб ведучий елемент дорівнював одиниці. Розділимо всі елементи ведучого рядка на ведучий елемент 2 і застосувавши елементарні перетворення приведемо ведучий стовпчик до одиничної форми.

Детальні ітерації представимо у наступних симплекс-таблицях.

Таблиця 1′

рядок	x_b	*c*	x_1	x_2	x_3	x_4	*f*
1	x_3	12	2	3	1	0	0
2	x_4	4	1	1/2	0	1/2	0
0	*f*	0	-3	-2	0	0	1

x**(-2); (3)**

Таблиця 2

Ведучий рядок

рядок	x_b	*c*	x_1	x_2	x_3	x_4	*f*
1	x_3	4	0	2	1	-1	0
2	x_1	4	1	½	0	½	0
0	*f*	12	0	-½	0	3/2	1

: 2

Ведучий стовпчик

$$\overrightarrow{X_2} = \{4, 0, 4, 0\} \quad \text{та} \quad f_2 = 12.$$

Ітерацію завершено.

Останній рядок симплекс-таблиці (таблиця 2) містить від'ємне число. Це означає, що оптимальне рішення ще не одержано. Отже, ітераційний процес знову повторюється.

1. x_2 – ведучий стовпчик;
2. $\min\left\{\frac{4}{2};\ \frac{4}{1/2}\right\} = \min\{2;\ 8\} = 2 \Rightarrow$ перший рядок - ведучий;
3. Елемент (2). Що знаходиться на перетині ведучого стовпчика і ведучого рядка, - ведучий елемент.
4. Приведемо ведучий елемент до 1, розділивши всі елементи ведучого рядка на 2 (Див. Табл. 2′).

Таблиця 2′

рядок	x_b	*c*	x_1	x_2	x_3	x_4	*f*
1	x_3	2	0	1	½	-½	0
2	x_1	4	1	½	0	½	0
0	*f*	12	0	-½	0	3/2	1

× (-½); (½)

Таблиця 3

рядок	x_b	*c*	x_1	x_2	x_3	x_4	*f*
1	x_2	2	0	1	½	-½	0
2	x_1	3	1	0	-1/4	¾	0
3	*f*	13	0	0	1/4	5/4	1

$$\overrightarrow{X_3} = \{3, 2, 0, 0\} \quad \text{та} \quad f_3 = 13.$$

Останній рядок симплекс-таблиці (таблиця 3) не містить від’ємних чисел, отже, приходимо до висновку, що оптимальний розв’язок знайдено.

4. Визначимо оптимальний розв’язок:

$$x_1 = 3,\ \ x_2 = 2,\ \ x_3 = 0,\ \ x_4 = 0 \quad \text{та} \quad f_{\max} = 13$$

Одержаний результат узгоджується із тим, що одержано у п.1.1.

4. Модифікований алгоритм симплекс-методу (М-метод)

Ми вже розглянули симплексний метод для розв’язування задач лінійного програмування, записаних у стандартній формі. Нагадаємо, що стандартна форма задачі лінійного програмування має задовольняти трьом наступним умовам, а саме:

1. Цільова функція максимізується.
2. На всі змінні задачі накладається умова невід’ємності.
3. Кожне лінійне обмеження має бути записаним у вигляді нерівності змісту “ $\leq$ ” з невід’ємними правими частинами (константами).

Задачу лінійного програмування, в якій не виконується хоча б одна із трьох умов, називають нестандартною формою задачі лінійного програмування або просто нестандартною задачею лінійного програмування.

Продемонструємо, що шляхом невеликих модифікацій симплексний метод можна адаптувати до розв’язання деяких різновидів нестандартних задач лінійного програмування.

Зокрема, покажемо, як використати модифікаційну процедуру для розв’язання задач лінійного програмування, в яких необхідно мінімізувати цільову функцію.

Приклад 46. Знайти мінімальне значення функції $\varphi = -2x_1 - 3x_2$

$$\text{при обмеженнях} \quad \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 32 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0;\ \ i = \overline{1,2}$$

Розв’язання. Ця задача включає умову мінімізації цільової функції і може бути класифікована як нестандартна задача лінійного програмування. Зауважимо, що інші дві умови “стандартності” виконуються.

Для розв’язання задачі подібного типу необхідне розуміння, що мінімізація цільової функції φ еквівалентна знаходженню максимального значення цільової функції $f = -\varphi$. Отже, розв’язання цієї задачі можна звести до знаходження оптимального розв’язку стандартної задачі лінійного програмування, а саме:

Знайти максимальне значення функції

$$f = -(-2x_1 - 3x_2) = 2x_1 + 3x_2 \ \text{ при обмеженнях:} \ \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 32 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0;\ \ i = \overline{1,2}$$

Застосувавши симплекс-метод із введенням додаткових невід’ємних змінних x_3 та x_4, одержимо наступну послідовність симплекс-таблиць:

Таблиця 1

	x_b	c	x_1	x_2	x_3	x_4	f
1	x_3	32	5	4	1	0	0
2	$\boldsymbol{x_4}$	**5** **10**	**1/2** **1**	**1** **2**	**0** **0**	**1/2** **1**	**0** **0**
0	f	0	-2	-3	0	0	1

:2; x(-4); (3)

$\overrightarrow{X_1} = \{0, 0, 32, 10\}$ та $f_1 = 0$.

Таблиця 2

рядок	x_b	c	x_1	x_2	x_3	x_4	f
1	x_3	**4** 12	**1** 3	**0** 0	**1/3** 1	**-2/3** -2	**0** 0
2	x_2	3	1/2	1	-1/6	5/6	0
0	f	15	-1/2	0	0	3/2	1

:3; x(-1/2); (1/2)

$\overrightarrow{X_2} = \{0, 5, 12, 0\}$ та $f_2 = 15$.

Таблиця 3

рядок	x_b	c	x_1	x_2	x_3	x_4	f
1	x_1	4	1	0	1/3	-2/3	0
2	x_2	3	0	1	-1/6	5/6	0
0	f	17	0	0	1/6	7/6	1

$\overrightarrow{X_3} = \{4, 3, 0, 0\}$ та $f_3 = 17$.

Оптимальний розв’язок стандартної задачі має наступний вигляд: $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ та $f_{\max} = 17$. Отже, оптимальний розв’язок вихідної задачі: $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ та $\varphi_{\min} = -17$.

2) Система нерівностей-обмежень змісту “ $\geq$ ” або “=” і цільова функція на мініманізацію.

Розглянемо симплексний метод з використанням штучної бази або просто “М-метод” для розв’язання нестандартних задач лінійного програмування.

Розглянемо модель лінійного програмування в наступній формі:

Знайти мінімальне значення функції $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ldots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \quad \vdots \quad \ldots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (i = \overline{1,m})$$

$$x_i \geq 0, \quad j = \overline{1,n}$$

При цьому можна вважати, що c_j – коефіцієнти вартості a_{ij} – технологічні коефіцієнти, $в_i$ – праві частини системи обмежень ($в_i \geq 0$); невід'ємні змінні x_j – основні або розв'язувані змінні; Z – невідоме значення цільової функції або міра її ефективності. Як видно, в системі обмежень задачі відсутня одинична матриця і тому неможливо знайти початковий базисний розв'язок системи обмежень без додаткових перетворень, що трансформують вихідну модель в розширену задачу лінійного програмування. Це досягається додаванням до лівої частини кожного рівняння по одній штучній змінній, утворюючи таким чином штучний базис.

Відповідна розширена задача або М-задача матиме наступний вигляд:

Знайти мінімальне значення функції:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + Mx_{n+1} + Mx_{n+2} + \ldots + Mx_{n+m} \quad (M = \infty)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ldots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i \\ \vdots \quad \vdots \quad \ldots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases} \qquad (i = \overline{1,m})$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}$$

де $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+i}, \ldots, x_{n+m}$ штучні змінні.

Величина M вважається достатньо великим додатнім числом, якщо задача розв'язується на відшукання мінімального значення функції.

Знаходження оптимального розв'язку вихідної задачі обгрунтовується наступною теоремою.

Теорема. Якщо в оптимальний розв'язок М-задачі включені тільки основні змінні (x_1; x_2; ... x_n), тобто всі штучні змінні виведені з базису і дорівнюють нулю, $x_{n+i} = 0,\ (i = \overline{1,m})$, то вихідна задача має допустимий розв'язок, який може бути знайдено двоетапним симплекс-методом.

Наведемо приклад застосування М-методу.

Приклад 47. Знайти мінімальне значення функції $Z=2x_1 + x_2$

при обмеженнях $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \end{cases}$ $\quad x_i \geq 0,\ i = \overline{1,2}$

Розв'язання. Так як система обмежень містить дві лінійні нерівності, то достатньо використати дві додаткові невід'ємні змінні x_3 та x_4 для приведення її до системи двох лінійних рівнянь:

Маємо $Z = 2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4$

при обмеженнях $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 6 \end{cases}$

$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}$$

Із заданої умови обмежень неможливо знайти перший допустимий розв'язок. Ми не можемо покласти, що $x_1=x_2=0$, тому що одержимо від'ємні значення додаткових змінних $x_3=-6$ та $x_4=-6$.

Використавши дві штучні змінні x_5 та x_6, побудуємо М-задачу.

Знайти мінімальне значення функції:

$$Z = 2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + Mx_5 + Mx_6; \quad M(=\infty)$$

при обмеженнях $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_5 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 + x_6 = 6 \end{cases}$

$$x_i \geq 0;\ i = \overline{1,6}\ .$$

де x_5 та x_6 - штучні змінні; М – досить велике додатнє число. Нагадаємо, що цільова функція вихідної задачі $Z = 2x_1 + x_2$ на відшукання її мінімального значення і тому доцільно очікувати, що змінні з досить великими коефіцієнтами в цільовій функції не повинні бути в оптимальному рішенні.

Отже, штучні змінні мають бути виключені із цільової функції.

Тому що $\begin{cases} x_5 = 6 - 2x_1 - 4x_2 + x_3 \\ + \\ x_6 = 6 - 3x_1 - 2x_2 + x_4 \\ \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \\ x_5 + x_6 = 12 - 5x_1 - 6x_2 + x_3 + x_4 \end{cases}$

Маємо $Z_{min}=2x_1+x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4+M(12\text{-}5x_1\text{-}6x_2+x_3+x_4)=$

$$=2x_1+x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4+12M-5Mx_1-6Mx_2+Mx_3+Mx_4=$$

$$=x_1(2-5M)+x_2(1-6M)+x_3(0+M)+x_4(0+M)+12M.$$

Тоді розширена задача прийме вигляд:

Знайти мінімальне значення функції:

$$Z=x_1(2-5M)+x_2(1-6M)+x_3(0+M)+x_4(0+M)+12M$$

При обмеженнях $\begin{cases} 2\boldsymbol{x}_1 + 4\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 \quad + \boldsymbol{x}_5 \quad = 6 \\ 3\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 \quad - \boldsymbol{x}_4 \quad + \boldsymbol{x}_6 = 6 \end{cases}$

$$\boldsymbol{x_i} \geq 0; \boldsymbol{i} = \overrightarrow{1,6}$$

Нарешті, перепишемо цільову функцію в вигляді:

$-(2-5M)x_1-x_2(1-6M)-x_3(0+M)-x_4(0+M)-12M+Z=0$ або

$(-2+5M)x_1+(-1+6M)x_2+(0-M)x_3+x_4(0-M)-12M+Z=0,$

при цьому коефіцієнти при Z дорівнює 1. Одержуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2\boldsymbol{x}_1 + 4\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 \qquad + \boldsymbol{x}_5 \qquad = 6 \\ 3\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 \qquad - \boldsymbol{x}_4 \qquad + \boldsymbol{x}_6 = 6 \\ (-2+5\boldsymbol{M})\boldsymbol{x}_1 + (-1+6\boldsymbol{M})\boldsymbol{x}_2 + (0-\boldsymbol{M})\boldsymbol{x}_3 + (0-\boldsymbol{M})\boldsymbol{x}_4 + \boldsymbol{Z} = 0 + 12\boldsymbol{M} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x_i} \geq 0; \quad \boldsymbol{i} = \overrightarrow{1,6}$$

Розширена матриця системи:

$$\begin{array}{cccccccc} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_4 & \boldsymbol{x}_5 & \boldsymbol{x}_6 & \boldsymbol{Z} & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ (-2+5\boldsymbol{M}) & (-1+6\boldsymbol{M}) & (0-\boldsymbol{M}) & (0-\boldsymbol{M}) & 0 & 0 & 1 & 0+12\boldsymbol{M} \end{array}\right)$$

Визначемо, що кожний із x_5, x_6 та Z – стовпчиків в розширеній матриці утворюють одиничні вектори штучної бази.

Застосувавши двоетапну симплекс-процедуру, одержимо оптимальний розв'язок поставленої задачі. На першому етапі симплекс процедури необхідно вивести штучні змінні x_5 та x_6 із базису.

В силу того, що на штучні змінні накладено обмеження їх невід'ємності ($x_5 \geq 0$; $x_6 \geq 0$), то мінімальне значення штучних змінних дорівнює 0. Як тільки це досягнуто, то можна стверджувати, що перший етап виконано і вихідна задача має оптимальний розв'язок.

На другому етапі, ми продовжуємо розв'язання задачі звичайним симплекс-методом до знаходження допустимого розв'язку, що містить тільки основні змінні задачі. Зауважимо, що штучні змінні вже виведені із базису.

Вихідна таблиця для М-задачі крім штучних змінних, що утворюють штучну базу, містить додатковий рядок, позначимо його *(-1)*. Одержуємо таблицю 1.

Таблиця 1

Рядок	$x_Б$ *(базис)*	*C*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	x_5	3/2 6	1/2 2	1 4	-1/4 -1	1 0	1/4 1	0 0	0 0
2	x_6	6	3	2	0	-1	0	1	0
0	Z	0	-2	-1	0	0	0	0	1
-1		12M	5M	6M	-M	-M	0	0	0

:4; x(-2);(1); (6M)

Перший допустимий розв’язок одержуємо покладаючи $x_1=0; x_2=0; x_3=0$ $x_4=0$.

Отже $\overrightarrow{\boldsymbol{x}_1} = \{0; 0; 0; 0; 6; 6\}$ та $Z_1=12M$; $(M=\infty)$

Штучні змінні не виведено із базису, тому одержаний розв’язок не оптимальний.

Доки штучні змінні утворюють базис, ми працюємо з рядком (-*1*) і за його елементами вибираємо змінну, яку доцільно ввести в базис.

Тому що ми знаходимо мінімальне значення функції, то вибираємо змінну x_2 (в рядку (-*1*) елемент (*6M*) приймає найбільше значення). Мінімальне значення відношення відповідає першому рядку. Отже, змінна x_2 вводиться в базис, а змінна x_5 виводиться із базиса.

На перетині відповідних рядка і стовпчика – ведучий елемент (він дорівнює *4*).

Зауваження. Коли штучна зміна виводиться із базису то відповідний стовпчик в симплекс-таблиці залишається незаповненим.

Після виключення змінної x_2 із всіх рядків, крім першого, одержуємо симплекс-таблицю 2.

Таблиця 2

Рядок	$X_Б$ (*базис*)	*C* (*constant*)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	x_2	3/2	1/2	1	-1/4	0		0	0
2	x_6	3/2 3	1 3	0 0	1/4 1/2	-1/2 -1		1/2 1	0
0	*Z*	3/2	-3/2	0	0	0		0	1
-1		3M	2M	0	1/2M	-M		0	0

:2; x(-1/2);(3/2); (-2M)

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}_2} = \left\{0; \frac{3}{2}; 0; 0; 0; 3\right\}; \quad \boldsymbol{Z}_2 = \frac{3}{2} + 3\boldsymbol{M}; \ (\boldsymbol{M} = \infty)$$

Наступна симплекс-ітерація представляє x_1 як базисну змінну та виводить штучну змінну x_6 із базису. Переходимо до таблиці 3.

Таблиця 3

Рядок	$X_Б$ (*базис*)	*C* (*const*)	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	*Z*
1	x_2	3/4	0	1	-3/8	¼			0
2	x_1	6 3/2	4 1	0 0	1 ¼	-2 -1/2			0
0	**Z**	15/4	0	0	1/8	-3/4			1
-1		0	0	0	0	0			0

x_4: $(\frac{3}{8});(-\frac{1}{8})$

$$\vec{X}_3 = \left\{ \frac{3}{2}; \frac{3}{4}; 0; 0; 0; 0 \right\}; \; Z_3 = \frac{15}{4}$$

Із останньої таблиці одержуємо допустимий базисний розв'язок, який містить тільки основні змінні. Маємо $x_5=0$ та $x_6=0$. Крім того всі елементи рядка (-1) дорівнюють нулеві.

Оцінюємо знайдений розв'язок на оптимальність. Тому що, серед елементів нульового рядка є додатні числа, то одержаний розв'язок не оптимальний.

Реалізуємо алгоритм симплекс-методу і визначаємо, що змінну x_3 доцільно ввести, а x_1 вивести із базису. Наступна симплекс-таблиця має вигляд:

Таблиця 4

Рядок	$X_Б$ *(базис)*	C *(const)*	X_1	X_2	X_3	X_4	Z
1	x_2	3	3/2	1	0	-1/2	0
2	x_3	6	4	0	1	-2	0
0	Z	3	-1/2	0	0	-1/2	1

$$\bar{x}_4 = \{0; 3; 6; 0\}; \; z_4 = 3.$$

Оптимальний розв'язок становить: $x_1 = 0; x_2 = 3; x_3 = 6; x_4 = 0$ та $Z_{min} = 3$

Завдання для самостійної роботи

1.У завданнях 1-11 розв'язати кожну із задач лінійного програмування графічним методом. Знайти найбільше і найменше значення функції f, що задовольняє заданим обмеженням:

1. $$f = 8x_1 + 4x_2, \quad \begin{cases} x_1 - x_2 \ge -6, \\ -2x_1 + x_2 \ge -4, \\ x_1 + x_2 \ge -12, \\ -x_1 - 2x_2 \ge -4. \end{cases}$$

2. $$f = 3x_1 + x_2, \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge -4, \\ -3x_1 + x_2 \ge -6, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge -12. \end{cases}$$

3. $$f = 4x_1, \quad \begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 10, \\ 2x_1 - x_2 \ge -4, \\ 7x_1 + 14x_2 \ge -21, \\ -3x_1 + x_2 \ge -4. \end{cases}$$

4. $$f = -7x_1 + x_2, \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 8, \\ -x_1 + x_2 \le 7, \\ 3x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge -2. \end{cases}$$

5. $f = x_1 - 7x_2,$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge -4, \\ 5x_1 - x_2 \ge -3, \\ x_1 - 3x_2 \le 6. \end{cases}$$

6. $f = -7x_2,$
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 5, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge -6, \\ x_1 + 3x_2 \ge -9, \\ -3x_1 + 2x_2 \ge -6. \end{cases}$$

2. У завданнях 1-15 розв'язати кожну задачу лінійного програмування симплекс-методом ($x_i \ge 0$).

1. $f_{\max} = 12x_1 - x_2 + x_3,$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 6, \\ 7x_1 + x_2 + x_3 \le 18, \\ x_2 - 3x_3 \le 4. \end{cases}$$

2. $f_{\max} = x_1 - 3x_3,$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 \le 1, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \le 20, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 \le 16. \end{cases}$$

3. $f_{\max} = -x_1 + x_2 + 2x_3,$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 9x_3 + x_4 \le 12, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \le 16, \\ x_3 \le 6. \end{cases}$$

4. $f_{\max} = 5x_1 + x_2,$
$$\begin{cases} x_1 \le 8, \\ x_2 \le 6, \\ 3x_1 + 8x_2 \le 48. \end{cases}$$

5. $f_{\max} = 3x_1 + x_2,$
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ x_2 \le 2. \end{cases}$$

6. $f_{\max} = 4x_1 + 3x_2 - x_3,$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \le 12, \\ x_1 \le 4. \end{cases}$$

3.Розв'язати задачі лінійного програмування з використанням М-методу ($x_i \ge 0$)

1. $f = -x_1 + 2x_2 - x_3 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

2. $f = -2x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 30 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 12 \end{cases}$$

3. $f = -3x_1 - x_3 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 5 \\ 2x_2 + 3x_3 \le 4 \\ -2x_3 \le 8 \end{cases}$$

6. $f = -12x_1 - x_2 + 4x_3 \to \min$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 6 \\ 8x_1 + x_2 \ge 15 \end{cases}$$

7. $f = 5x_1 - x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ 3x_1 + x_2 \ge 6 \end{cases}$$

8. $f = -x_1 - x_2 + 5x_3 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 \le 12 \end{cases}$$

9. $f = 17x_1 + x_2 - x_3 \to \min$

4. $f = -x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 \le 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \end{cases}$$

5. $f = -2x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - x_3 \le 2 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ge 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 \ge 18 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$$

10. $f = -5x_1 + 3x_2 - x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_4 = 12 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 \ge 18 \\ x_4 \le 4 \end{cases}$$

Питання для самоконтролю

1. Загальна, стандартна та канонічна задачі лінійного програмування.
2. Геометричний зміст ЗЛП. Многокутник допустимих розв’язків. Опорна пряма.
3. Ідея симплексного методу розв’язування ЗЛП. Алгоритм симплексного методу.
4. Алгоритм методу штучного базису.

Література: 11, С.16-99.

Тема 39. Двоїстість у лінійному програмуванні

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, що містить такі питання теми: Теорія двоїстості для випадку симетричної пари взаємодвоїстих задач: означення прямої задачі та двоїстої до неї у симетричному випадку, взаємозв’язок між ними; співвідношення між допустимими значеннями цільових функцій прямої та двоїстої задач. Перша та друга теореми двоїстості. Знаходження розв’язку однієї з пар симетричних взаємно двоїстих задач за відомим розв’язком іншої задачі. Економічна інтерпретація теорем двоїстості (оптимальні значення двоїстих змінних як оптимальні оцінки ресурсів у задачах оптимізації плану виробництва). Поняття про двоїстий симплекс-метод.

План практичного завдання

1. Алгоритм побудови двоїстої задачі.
2. Алгоритм двоїстого симплексного методу.
3. Розв’язок задач лінійного програмування двоїстим симплекс-методом.

Термінологічний словник ключових понять

Теорія двоїстості - кожній задачі лінійного програмування можна певним чином зіставити деяку іншу задачу лінійного програмування, яка називається двоїстою або спряженою по відношенню до початкової або прямої. Теорія двоїстості є корисною для якісного аналізу задачі лінійного програмування.

Двоїста задача – це задача, де зв'язок прямої і двоїстої задачі полягає в тому, що коефіцієнти c_j цільової функції прямої задачі є вільними членами системи обмежень двоїстої задачі, вільні члени $в_i$ системи обмежень прямої задачі служать коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі, а матриця коефіцієнтів системи обмежень двоїстої задачі є транспонованою матрицею коефіцієнтів системи обмежень прямої задачі.

Симетрична пара двоїстих задач. Якщо в парі двоїстої задачі: в системі обмежень прямої задачі нерівності виду $''\leq''\left(''\geq''\right)$, то в системі обмежень двоїстої задачі нерівності виду $''\geq''\left(''\leq''\right)$. При цьому змінні обох задач можуть приймати лише невід'ємні значення.

Несиметрична пара двоїстих задач. Якщо в парі двоїстих задач система обмежень прямої задачі має рівність ("="), то система обмежень двоїстої задачі – нерівність виду $''\geq''$ або $''\leq''$. При цьому змінні прямої задачі – невід'ємні числа, а змінні двоїстої задачі можуть приймати будь-які значення (додатні або від'ємні).

Перша теорема двоїстості. Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний розв'язок, то і двоїста до неї задача має оптимальний розв'язок, причому значення цільової функції задач на своїх оптимальних рішеннях співпадають. Якщо ж одна із пари двоїстих задач не має розв'язку у вигляді необмеженості цільової функції, то друга не матиме розв'язку в вигляді несумісності системи обмежень.

Друга теорема двоїстості. Компоненти оптимального розв'язку однієї з задач (прямої або двоїстої) дорівнює абсолютним значенням коефіцієнтів при відповідних змінних цільової функції другої задачі (двоїстої або прямої) при досягненні нею оптимуму і за умови, що отриманий оптимальний розв'язок не є виродженим.

Двоїстий симплекс-метод. Двоїстий симплекс-метод, як і звичайний симплексний метод, дозволяє в результаті послідовного покращення допустимих опорних розв'язків, або знайти оптимальний розв'язок, або зробити висновок про його відсутність. Алгоритм двоїстого симплекс-метода такий, що як тільки майже допустимий опорний розв'язок стає допустимим, він стає також оптимальним.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

1.Подвійні задачі лінійного програмування

У практичних застосуваннях часто зустрічається інший різновид нестандартних задач лінійного програмування, який характеризується наступними особливостями:

1. Цільова функція мінімізується.
2. На всі змінні задачі накладається умова невід'ємності.
3. Кожне лінійне обмеження-нерівність має знак "$\geq$".

Зручний метод для розв'язання такого типу задач лінійного програмування базується на наступному спостереженні.

Кожна задача лінійного програмування, що містить умову максимізації цільової функції, асоціюється з іншою задачею, в якій необхідно мінімізувати цільову функцію та навпаки.

З метою ідентифікації задану задачу лінійного програмування називають основною задачею, а пов'язану з нею – подвійною задачею лінійного програмування.

Наступний приклад ілюструє техніку побудови подвійної задачі до заданої задачі лінійного програмування.

Приклад 48. Записати задачу, подвійну до заданої:

Знайти мінімальне значення цільової функції $\varphi = 6x_1 + 8x_2$

при обмеженнях $\begin{cases} 40x_1 + 10x_2 \geq 2400 \\ 10x_1 + 15x_2 \geq 2100 \\ 5x_1 + 15x_2 \geq 1500 \end{cases}$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0$$

Розв'язання. По-перше, побудуємо таблицю для даної основної задачі

x_1	x_2	Constant
40	10	2400
10	15	2100
5	15	1500
6	8	→ min

Інтерпретуючи останню таблицю як вихідну (початкову) симплекс-таблицю для стандартної задачі лінійного програмування, за умови, що знаки коефіцієнтів цільової функції не змінюються на протилежні, одержуємо подвійну задачу лінійного програмування.

y_1	y_2	y_3	Constant
40	10	5	6
10	15	15	8
2400	2100	1500	→ max

Знайти максимальне значення цільової функції

$$f = 2400y_1 + 2100y_2 + 1500y_3$$

при обмеженнях $\begin{cases} 40y_1 + 10y_2 + 5y_3 \leq 6 \\ 10y_1 + 15y_2 + 15y_3 \leq 8 \end{cases}$,

де $y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$

Взаємозв'язок між розв'язком основної та подвійної задач лінійного програмування розкривається наступною теоремою.

Основна теорема подвійності, визначена Дж. фон Нейманом (1903-1957), приводиться без доведення.

Теорема. Основна задача лінійного програмування має розв'язок тоді і тільки тоді, коли відповідна подвійна задача лінійного програмування також має розв'язок.

1. Цільові функції основної та подвійної задачі досягають одного і того за величиною оптимального значення.
2. Оптимальний розв'язок основної задачі лінійного програмування можна знайти в останньому рядку оптимальної симплекс-таблиці у стовпчиках, що відповідають додатковим змінним при розв'язанні подвійної задачі лінійного програмування симплекс-методом.

Керуючись основними положеннями теореми, розв'яжемо задачу прикладу 5.

Помічаємо, що побудована подвійна задача до заданої (основної) записана у стандартній формі і тому розв’яжемо її симплекс-методом.

Уводимо додаткові невід’ємні змінні y_4 та y_5 і одержуємо наступну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 40y_1 + 10y_2 + 5y_3 + y_4 = 6 \\ 10y_1 + 15y_2 + 15y_3 + y_5 = 8 \\ -2400y_1 - 2100y_2 - 1500y_3 + f = 0 \end{cases}, \quad \text{де } y_j \geq 0, \; j = \overline{1,5}$$

Реалізовуючи алгоритм симплексного методу, одержуємо наступну послідовність симплекс-таблиць:

Таблиця 1

y_b	c	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	f
y_4	**3/20** 6	**1** 40	**1/4** 10	**1/8** 5	**1/40** 1	**0** 0	**0** 0
y_5	8	10	15	15	0	1	0
f	0	-2400	-2100	-1500	0	0	1

:40; ×(-10); (2400)

$$\overrightarrow{Y_1} = \{0, 0, 0, 6, 8\} \text{ та } f_1 = 0.$$

Таблиця 2

y_b	c	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	f
y_1	3/20	1	1/4	1/8	1/40	0	0
y_5	**13/2** **13/2**	**0** **0**	**1** **25/2**	**11/10** **55/4**	**-1/50** **-1/4**	**2/25** **1**	**0** **0**
f	360	0	-1500	-1200	60	0	1

× (2/25); (-1/4); (1500)

$$\overrightarrow{Y_2} = \left\{\frac{3}{20}, 0, 0, 0, \frac{13}{2}\right\} \text{ та } f_2 = 360.$$

Таблиця 3

y_b	c	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	f
y_1	1/50	1	0	-3/20	3/100	-1/50	0
y_5	13/25	0	1	11/10	-1/50	2/25	0
f	1140	0	0	450	30	120	1

Розв’язок для основної задачі

$$\overrightarrow{Y_3} = \left\{\frac{1}{50}, \frac{13}{25}, 0, 0, 0\right\} \text{ і } f_{\max} = 1140.$$

Остання таблиця оптимальна.

Згідно основної теореми подвійності, розв'язок основної (вихідної) задачі: $x_1 = 30$ і $x_2 = 120$ з мінімальним значенням цільової функції φ, що дорівнює 1140, тобто $\varphi_{\min} = 1140$.

Зауважимо, що розв'язок подвійної задачі (на максимізацію цільової функції) одержується звичайним способом із останньої симплекс-таблиці, тобто $y_1 = \frac{1}{50}$; $y_2 = \frac{13}{25}$ та $y_3 = 0$, і $f = 1140$.

Помічаємо, що максимальне значення цільової функції f дорівнює мінімальному значенню цільової функції φ, як і гарантує основна теорема подвійності.

2. Подвійний симплекс-метод

Зручним методом для розв'язання нестандартних задач лінійного програмування являється симплекс-метод.

Наступний приклад ілюструє техніку застосування подвійного симплекс-методу для розв'язання задач лінійного програмування.

Приклад 49. Знайти мінімальне значення функції

$$\varphi = 12x_1 + 9x_2 + 15x_3 + 4x_4$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 \ge 15 \\ 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 \ge 12 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$$

Розв'язання. Так як система обмежень складається із двох лінійних нерівностей, уводимо дві додаткові змінні x_5 і x_6 і приводимо її до системи двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 - x_5 = 15 \\ 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 - x_6 = 12 \end{cases},$$

$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,6}$$

що еквівалентно

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 + x_5 = -15 \\ -9x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 7x_4 + x_6 = -12 \end{cases}$$

Далі, приводимо цільову функцію до наступної форми

$$-12x_1 - 9x_2 - 15x_3 - 4x_4 - 0 \cdot x_5 + \varphi = 0$$

та одержуємо систему лінійних рівнянь виду:

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 + x_5 = -15 \\ -9x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 7x_4 + x_6 = -12 \\ -12x_1 - 9x_2 - 15x_3 - 4x_4 - 0 \cdot x_5 - 0 \cdot x_6 + \varphi = 0 \end{cases}$$

Відповідна розширена матриця останньої системи має вигляд:

$$\begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \varphi & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} -3 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & -15 \\ -9 & -5 & -4 & -7 & 0 & 1 & 0 & -12 \\ -12 & -9 & -15 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Помічаємо, що кожен із стовпчиків (x_5, x_6, та φ) розширеної матриці має одиничну форму, звідки слідує, що x_5, x_6, та φ - базисні змінні.

Вихідна симплекс-таблиця побудована на основі розширеної матриці системи має наступний вигляд

Таблиця 1

x_b	c (const)	x_1	$\boldsymbol{x_2}$	x_3	$\boldsymbol{x_4}$	x_5	x_6	φ	
x_5	**15/2**	**3/2**	**1**	**5/2**	**1**	**-1/2**	**0**	**0**	**: (-2); x(7); (4)**
	-15	**-3**	**-2**	**-5**	**-2**	**1**	**0**	**0**	
x_6	-12	-9	**-5**	-4	**-7**	0	1	0	
φ	0	-12	**-9**	-15	**-4**	0	0	1	

Перш ніж ми представимо повне розв'язання заданої задачі, підсумуємо основні кроки подвійного симплекс-методу.

<u>Подвійний симплекс-метод</u>

1. Побудувати вихідну симплекс-таблицю.
2. Визначити, чи досягнуто оптимальне рішення:

a) Якщо всі елементи стовпця вільних членів (const) – невід'ємні числі, то оптимальне рішення одержано. Перейти до п.4.

b) Якщо у стовпчику вільних членів є хоча б один від'ємний елемент, то оптимальне рішення не одержано. Перейти до п.3

3. Виконати наступні ітерації:

1) Вибрати ведучий рядок: знайти найбільший за абсолютною величиною елемент стовпчика вільних членів. Рядок, що містить цей елемент і є ведучим рядком.

2) Вибрати ведучий стовпчик: розділити на від'ємні числа ведучого рядка відповідні елементи останнього рядка симплекс-таблиці. Найменше з одержаних відношень і відповідає ведучому стовпчику.

3) Знайти ведучий елемент як перетин ведучого рядка та ведучого стовпчика.

4) Використовуючи елементарні операції, привести ведучий стовпчик до одиничної форми додаванням відповідно домноженого ведучого рядка до кожного із останніх рядків. Перейти до п.2.

4. Визначити оптимальне рішення.

Для цього в останній симплекс-таблиці всім базисним змінним надати відповідні числові значення із стовпчика вільних членів, всім іншим змінним надати нульові значення.

<u>Повне розв'язування заданої задачі</u>

Перший крок алгоритму подвійного симплекс-методу – побудова вихідної симплекс-таблиці уже здійснено (Див. Табл. 1)

Так як є від'ємні числа у стовпчику вільних членів вихідної симплекс-таблиці, то початкове рішення

$$\overrightarrow{X_1} = \{0, 0, 0, 0, -15, -12\} \text{ та } \phi = 0 \text{ – не оптимальне.}$$

Отже, переходимо до п.3.

Виконуємо наступні ітерації:

1) Так як елемент (-15) у стовпчику вільних членів вихідної симплекс-таблиці має найбільшу абсолютну величину, то рядок x_5 – ведучий рядок.
2) Розділимо на від'ємні числа ведучого рядка відповідні елементи останнього рядка таблиці і порівняємо одержані відношення.

$$\min\left\{\frac{-12}{-3}; \frac{-9}{-2}; \frac{-15}{-5}; \frac{-4}{-2};\right\} = \frac{4}{2}$$

Отже, x_4 – ведучий рядок.

3) Елемент (-2), що належить ведучому стовпчику і ведучому рядку – ведучий елемент.

Далі, приведемо ведучий елемент до 1, розділивши всі елементи ведучого рядка на (-2). Використовуючи елементарні операції, одержуємо наступну симплекс-таблицю.

Таблиця 2

x_b	c	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ϕ
x_4	15/2	3/2	1	5/2	1	-1/2	0	0
x_6	81/2	9	2	27/2	0	-7/2	1	0
ϕ	30	-6	-5	-5	0	-2	0	1

Стовпчик вільних членів останньої симплекс-таблиці не містить від'ємних чисел. Отже, приходимо до висновку, що оптимальне рішення досягнуто.

$$\overrightarrow{X_2} = \{0, 0, 0, 15/2, 0, 81/2\} \text{ та } \phi_{\min} = 30.$$

Завдання для самостійної роботи

1.В завданнях 11-24 розв'язати задачі лінійного програмування подвійним симплекс-методом ($x_i \ge 0$).

1. $f = 4x_1 + 5x_2 + x_3,$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 15, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \le 15. \end{cases}$$

2. $f = 6x_1 + x_2 + 4x_3,$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 18, \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 \le 28. \end{cases}$$

3. $$f = 6x_1 + 3x_2 + 7x_3, \quad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 \le 18, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \le 26. \end{cases}$$

4. $$f = x_1 + 4x_2 + 7x_3, \quad \begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 6x_3 \le 23, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 \le 18. \end{cases}$$

5. $$f = 7x_1 + x_3, \quad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 8, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 16. \end{cases}$$

6. $$f = 2x_1 + x_2 + 4x_3, \quad \begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 \le 25, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 18. \end{cases}$$

Питання для самоконтролю

1. Двоїста ЗЛП. Пари двоїстих ЗЛП у матричному вигляді.
2. Теореми двоїстості.
3. Економічний зміст двоїстих ЗЛП. Двоїстий симплекс-метод.
4. Поняття псевдоплану.

Література: 11, С.99-123.

Тема 40. Методика розв’язування транспортної задачі

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал: постановка транспортної задачі, умова існування її розв’язку. Пошук оптимального плану перевезень за методом потенціалів.

План практичного завдання

1. Побудова математичної моделі транспортної задачі.
2. Побудова першого опорного плану транспортної задачі методом північно-західного кута, методом мінімальної вартості, методом подвійних відміток.
3. Розв’язання транспортної задачі методом потенціалів.

Термінологічний словник ключових понять

Транспортна задача (ТЗ) – одна з найпоширених задач ЛП. Її мета – розробка найбільш раціональних шляхів і способів транспортування товарів, усунення дуже далеких, зустрічних, повторних перевезень. Все це скорочує час перевезення товарів, зменшує витрати підприємств, фірм, що пов’язані з забезпеченням процесів постачання сировиною, матеріалами, топливом, обладнанням і т.д. Транспортна задача об’єднує широке коло задач з єдиною математичною моделлю. Данні задачі відносяться до задач ЛП і можуть бути розв’язані симплексним методом. Але матриця системи обмежень ТЗ настільки своєрідна, що для її розв’язку розроблено спеціальні методи. Ці методи, як і симплексний метод, дозволяють знайти початковий опорний розв’язок, а потім, покращуючи його, отримати оптимальний розв’язок.

Балансова умова - $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, де $\sum_{i=1}^{m} a_i$ - сумарні запаси вантажу постачальників, $\sum_{j=1}^{n} b_j$ - сумарні запити вантажу споживачів.

Закритий тип ТЗ – якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Відкритий тип ТЗ – якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Метод північно-західного кута – полягає в тому, що запаси постачальника використовуються для забезпечення запитів споживачів до тих пір, доки не будуть вичерпані повністю, після чого використовуються запаси наступного по номеру постачальника. Заповнення таблиці ТЗ починається з лівого верхнього кута і складається з однотипових кроків. На кожному кроці, виходячи з запасів постачальника і запитів споживача, заповнюється тільки одна комірка і відповідно виключається з розгляду один постачальник або споживач.

Метод мінімальної вартості – полягає в тому, що вантаж розподіляється в першу чергу в ті комірки, в яких знаходиться мінімальний тариф перевезень. Далі поставки розподіляються в незайняті комірки з найменшими тарифами з урахуванням запасів, що залишилися у постачальників, і задоволення попиту споживачів. Процес розподілу продовжують до тих пір, поки весь вантаж від постачальників не буде вивезений, а споживачі не будуть задоволені. При розподілі вантажу може з'ясуватися, що кількість зайнятих комірок менше, ніж $m+n-1$. В цьому випадку недостатня їх кількість заповнюється комірками з нульовими поставками, такі комірками називають **умовно зайнятими**.

Циклом – називається така послідовність комірок таблиці ТЗ, в якій дві і тільки дві сусідні комірки розташовані в одному рядку або стовпчику, причому перша і остання комірки також знаходяться в одному рядку або стовпці. Цикл відображають в таблиці ТЗ в вигляді замкненої ломаної лінії. В будь-якій клітці циклу відбувається поворот ланки ломаної лінії на 90°.

Метод потенціалів – загальна ознака визначення оптимального плану ТЗ, аналогічна до принципу розв'язання задачі ЛП симплексним методом, а саме: спочатку знаходять опорний план ТЗ, а потім його послідовно покращують до отримання оптимального плану.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Постановка транспортної задачі і її математична модель

Транспортна задача є задачою лінійного програмування, але допускає розв'язок більш простими методами, ніж симплекс-метод.

Загальна постановка цієї задачі така:

Потрібно скласти план перевезень деякого однорідного вантажу з m пунктів відправлень, в кожному з яких є $a_1, a_2, ..., a_m$ вантажу, відповідно, в n пунктів призначення з потребами вантажу $b_1, b_2, ..., b_n$ одиниць таким числом, щоб задовольнити запити всіх споживачів і мінімізувати сумарну вартість перевезень. Вартість c_{ij} перевезень одиниці вантажу, тобто відповідні тарифи, для всіх можливих маршрутів (i, j) – відомі.

Для побудови математичної моделі транспортної задачі скористаємось транспортною таблицею:

Таблиця 1

j			Пункти призначення					
			(1)	*(2)*	...	*(j)*	...	*(n)*
i			b_1	b_2	...	b_j	...	b_n
Пункти відправлень	*(1)*	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}
	(2)	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}
	⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮	…	⋮
	(i)	a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}
	⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮	…	⋮
	(m)	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}

Зазвичай, вважають, що загальний запас вантажу в пунктах відправлень дорівнює сумарній потребі пунктів споживання, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_1 = \sum_{j=1}^{n} b_j \ .$$

Нехай x_{ij} кількість вантажу, яка відправляється з пункту відправлення (i) в пункт призначення (j). На основі транспортної таблиці очевидно, що система змінних x_{ij} повинна задовольняти наступним умовам:

Знайти мінімальне значення функції

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (1)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m} & (2) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n} & (3) \\ x_{ij} \geq 0 & (4) \end{cases}.$$

Рівняння-обмеження (2) визначає сумарний обсяг поставок згідно рядків, а рівняння-обмеження (3) – сумарний обсяг поставок згідно стовпчиків транспортної таблиці 1.

Слід відзначити, що система рівнянь (1)-(4) представляє модель лінійного програмування з ($m+n$) рівнянь та з mn змінними.

Приклад 50. Розв’язати транспортну задачу

A \ B		(1)	(2)	(3)
		25	27	28
(1)	20	2	5	3
(2)	35	4	12	5
(3)	25	3	6	4

Розв’язання. Визначимо тип транспортної задачі.

Загальний запас вантажу в пунктах відправлень:

$$20+35+25=80 \text{ або } \sum_{i=1}^{3} a_i = 80.$$

Загальний обсяг потреб в пунктах призначення:

$$25++27+28=80 \text{ або } \sum_{j=1}^{3} b_j = 80.$$

В силу того, що $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j$, то модель транспортної задачі – закрита. Визначимо перший допустимий розв’язок методом “північно-західного кута”. Відповідна транспортна програма має наступний вигляд:

Таблиця 1

A \ B	25	**27**	**28**	
20	20 (2)	10 + (5)	3 (3)	u_1=-2
35	4 (4)	27 (12)	8 (5)	u_2=0
25	5 (3)	11 + (6)	20 (4)	u_3=-1
	ν_1=4	ν_2=12	ν_3=5	

По-перше, перевіряємо умову невиродженості транспортної програми:

$$m+n-1=3+3-1=5$$

По-друге, знаходимо відповідне значення цільової функції:

$$f_1=2\cdot 20+12\cdot 27+5\cdot 8+3\cdot 5++4\cdot 20=499$$

По-третє, обчислимо значення потенціалів відповідних рядків та стовпчиків транспортної таблиці.

Нехай $u_2=0$, тоді $\begin{cases} u_2+v_3=0 \\ u_3+v_3=4 \\ u_2+v_2=12 \\ u_3+v_1=3 \\ u_1+v_1=2 \end{cases}$

Отже, $u_1=-2; u_2=0; u_3=1; v_1=4; v_2=12; v_3=5.$

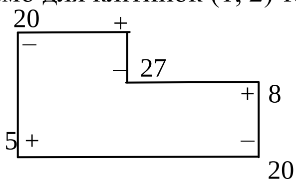
Далі, визначаємо уявні транспортні тарифи для кожної незаповненої клітинки і порівняємо їх з реальними.

Зауважимо, що реальні тарифи записують у верхньому, тоді як уявні – в протилежному нижньому куті клітинки.

Помічаємо, що для деяких незаповнених клітинок уявні тарифи більші реальних, тобто одержана транспортна програма не оптимальна.

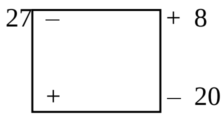
Для кожної клітинки, позначеної знаком "плюс", будуємо замкнений контур. Маємо для клітинок (1, 2) та (3, 2) зображуємо замкнуті контури

(1, 2)



$S_{(1,2)}=(10\text{-}5)\cdot 20=100$ – на стільки грошових одиниць зменшаться транспортні витрати, при заповненні клітинки (1, 2)

(3, 2)



$S_{(3,2)}=(11\text{-}6)\cdot 20=100$

Зауваження. Найбільше значення добутку $S_{(ij)}=x_{ij}\cdot(c'_{ij}-c_{ij})$ визначає клітинку, яку доцільно загрузити.

x_{ij} - найменше значення поставки серед тих, що у відповідному контурі відмічені знаком "мінус".

Виберемо клітинку (3, 2) та заповнимо її. Одержуємо наступну транспортну таблицю.

Таблиця 2

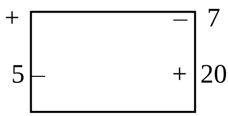
B A	25	**27**	**28**	
20	2 20	5 5	3 -2	$u_1=5$
35	4 9 +	12 7	5 28	$u_2=12$
25	3 5	6 20	4 -1	$u_3=6$
	$\nu_1=-3$	$\nu_2=0$	$\nu_3=-7$	

Як і раніше, згідно алгоритму, виконуємо наступні дії:

1) *m+n-1=5;*
2) $f_2=2\cdot 20+12\cdot 7+5\cdot 28+3\cdot 5+6\cdot 20=399;$
3) В таблиці тільки одна пуста клітинка, для якої уявні тарифи більше реальних тобто $c'_{(2,1)}-c_{(2,1)}=9-4=5$.

Отже, оптимальна програма не одержана.

4) Будуємо замкнутий контур для клітинки (2, 1).



$S_{(2,1)}=5\cdot 5=25$

і переходимо до наступної транспортної таблиці.

Таблиця 3

B A	25	27	28	
20	2 20	5 10 +	3 3	$u_1=-2$
35	4 + 5	12 2	5 28	$u_2=0$
25	3 -2	6 25	4 -1	$u_3=-6$
	$\nu_1=4$	$\nu_2=12$	$\nu_3=5$	

$f_3=2\cdot 20+4\cdot 5+12\cdot 2+5\cdot 28+6\cdot 25=374.$

Оптимальний розв'язок не знайдено. Реалізуємо алгоритм транспортної програми і переходимо до наступної транспортної програми.

Таблиця 4

B A	25	27	28	
20	2 18	5 2	3 3	$u_1=2$
35	4 7	12 7	5 28	$u_2=4$
			127	$u_3=3$
	$\nu_1=0$	$\nu_2=3$	$\nu_3=1$	

25	3 3	6 25	4 4

$f_4=2\cdot18+5\cdot2+4\cdot7+5\cdot28+6\cdot25=364.$

Для будь-якої незавантаженої клітинки уявні тарифи менші або дорівнюють реальним, отже оптимальна програма перевезень знайдена.

Таким чином, мінімальні транспортні затрати дорівнюють 364 (грош. один.).

Завдання для самостійної роботи

1.Розв’язати транспортну задачу.

Знайти такий план перевезень вантажів, який має найменші загальні витрати.

B_j / A_i	B_1=112-L	B_2=88+L	B_3=67+L	B_4=133-L
A_1=155-L	7	1	3	2
A_2=190-L	11-M	8	1	4
A_3=102+2L	1	10-M	9	1+M

Значення L і M задаються викладачем.

Питання для самоконтролю

1. Математична модель транспортної задачі. Відкрита та замкнена транспортна задача.
2. Невироджений опорний план транспортної задачі.
3. Методи складання опорний план транспортної задачі: північно-західного кута, мінімальної вартості, подвійної переваги.
4. Метод потенціалів розв’язання транспортної задачі. Цикли у транспортній задачі.

Література: 11, С.123-153.

Тема 41. Цілочислове програмування

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, що містить такі питання теми: математична постановка задач цілочислового (дискретного) програмування. Метод відтинань, метод Гоморі, поняття про метод гілок та меж розв’язування задач цілочислового програмування та меж розв’язування задач цілочислового лінійного програмування.

План практичного заняття

1. Алгоритм розв'язання задач цілочислового лінійного програмування методом Гоморі.
2. Алгоритм розв'язування задач цілочислового лінійного програмування методом гілок та меж.

Термінологічний словник ключових понять

Цілочисельна задача лінійного програмування – екстремальна задача, змінні якої приймають лише цілочисленні значення.

Метод Гоморі. В основі методу ідея, яка полягає в тому, що спочатку розв'язується задача лінійного програмування без врахування умов цілочисельності. Якщо отриманий таким чином розв'язок цілочисельний, то він приймається за оптимальний план початкової задачі. Якщо розв'язок не є цілочисельним, то система обмежень доповнюється умовою, яка видаляє з множини планів задачі нецілочисельний оптимальний план, але при цьому зберігає цілочисельні вершини множини планів. Потім розв'язується задача лінійного програмування з додатковою умовою. Якщо отриманий таким чином розв'язок цілочисельний, то він є оптимальним. Якщо ж і після цього не для всіх змінних виконується умова цілочисельності, то вводиться нова умова – відсічення. Умову-відсічення вибирають таким чином, щоб за скінчене число кроків прийти до цілочисельного розв'язку, якщо він у даній задачі існує.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Поняття про цілочисельне програмування

В багатьох оптимізаційних задачах лінійного програмування накладається умова цілочисельності змінних.

Існує декілька методів розв'язання задач подібного типу, але найбільш поширений метод знаходження цілочисельних розв'язків задач лінійного програмування – це метод Гоморі.

Розглянемо наступну задачу лінійного програмування.

Знайти мінімальне значення функції $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

при обмеженнях $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i; \; i = \overline{1,m} \\ x_j \geq 0 \; та \; x_j - цілі \; числа \end{cases}$ (1)

Основна ідея розв'язання задач цілочисельного програмування полягає в тому, що спочатку розглядається і розв'язується відповідна умові (1) допоміжна задача лінійного програмування, яка не містить умову цілочисельності змінних. Далі використовуються згідно алгоритму Гоморі деякі перетворення, які як правило, приводять до цілочисельного розв'язку задачі (1).

Алгоритм Гоморі для задач цілочисельного програмування

1. Побудувати допоміжну задачу лінійного програмування і розв'язати її симплексним методом.

Нехай остання симплекс-таблиця допоміжної задачі містить оптимальний розв'язок і може бути представлена таблицею к.

Таблиця К

Рядок	$X_Б$ ***(базис)***	***C (const)***	X_1	X_2	...	X_j	...	X_m	...	X_n	...
1	X_1	X_1^0	1	0	...	X_{1j}	...	0	...	X_{1n}	...
2	X_2	X_2^0	0	1	...	X_{2j}	...	0	...	X_{2n}	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
i	X_i	X_i^0	0	0	...	X_{ij}	...	0	...	X_{in}	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	X_m	X_m^0	0	0	...	X_{mj}	...	1	...	X_{mn}	...
0	Z	Z^0	0	0	...	...	...	0	...	...	...

Одержали допустимий розв'язок допоміжної задачі:

$$\overrightarrow{X}_к = \{x_1^0, x_2^0, ..., x_i^0, ..., x_m^0\} \text{ та } Z_k = Z^0 \qquad (2)$$

2. Визначити, чи буде одержаний розв'язок оптимальним.

а) Якщо одержаний розв'язок задовольняє умові цілочисельності, то одержаний допустимий розв'язок буде оптимальним і процес розв'язання припиняється.

б) Якщо хоча б одна із змінних одержаного розв'язку не задовільняє умові цілочисельності, то оптимальне рішення не знайдено. Переходимо до п. 3.

3. Реалізувати наступні ітерації:

Вибрати змінну x_i, величина якої не задовольняє умові цілочисельності в оптимальному рішенні допоміжної задачі. Тоді деякі із x_{ij} серед елементів x_i-рядка мають дробові значення. Якщо ця умова не виконується, то задача (1) не має цілочисельного розв'язку.

Позначимо через $[x_i]$ та $[x_{ij}]$ - цілі частини відповідних чисел x_i та x_{ij}, тобто це найбільші числа, що не перевищують величини чисел x_i та x_{ij}, відповідно. Тоді величини дробових частин q_i та q_{ij} чисел x_i та x_{ij} визначаються як різниці

$$x_i - [x_i] = q_i \text{ та } x_{ij} - [x_{ij}] = q_{ij}, \qquad (3)$$

де $q_i \ge 0$ та $q_{ij} \ge 0$.

Згідно умови $x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n})$ невід'ємні цілі числа, то і різниця

$$q_{i1}x_1 + q_{i2}x_2 + \ldots + q_{in}x_n - q_i \ge 0 \qquad (4)$$

також ціле невід'ємне число.

Нерівність (4) можна привести до рівняння введенням додаткової невід'ємної змінної $x_к$.

Маємо $q_{i1}x_1 + q_{i2}x_2 + \ldots + q_{in}x_n - x_к = q_i$ (5)

Домножимо обидві частини рівняння (5) на (-1) і одержаний результат допишемо до останньої симплекс-таблиці як ($m+1$) рядок.

Застосувавши подвійний симплекс-метод, знаходимо наступний допустимий розв'язок. Перейти до п. 2. Якщо одержаний розв'язок не задовольняє умову цілочисельності, по за останньою симплекс-таблицею будуємо нове обмеження і так далі... доки не одержимо оптимальне рішення або не впевнимось, що його не існує.

Зауваження. Якщо в оптимальному розв'язку допоміжної задачі декілька змінних виражені дробовими числами, то додаткове обмеження складають для $max\{q_i\}$. Це прискорює процес одержання оптимального цілочисельного рішення.

Метод розв'язання подібного типу проблем проілюструємо на наступному прикладі.

Приклад 51. Знайти максимальне значення функції $Z = x_1 + 2x_2$

При обмеженнях $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 1 \\ -2x_1 + x_2 \le 2 \\ 3x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$

$$x_j \ge 0 \; та \; x_j - цілі \; числа \;\; j = \overline{1,2}.$$

Розв'язання. Відповідна допоміжна задача може бути записана в наступному вигляді:

$$Z = x_1 + 2x_2 \to max$$

при обмеженнях $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 1 \\ -2x_1 + x_2 \le 2 \\ 3x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$

$$x_j \ge 0 \;, та \; x_j - цілі \; числа \;\; j = \overline{1,2}.$$

Застосувавши симплекс-метод, одержуємо оптимальний розв'язок допоміжної задачі, який представлено в таблиці 3.

Таблиця 3

Рядок	$x_Б$ *(базис)*	*C (const)*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	*Z*
1	x_3	28/5	0	0	1	1/5	3/5	0
2	x_2	12/5	0	1	0	3/5	2/5	0
3	x_1	1/5	1	0	0	-1/5	1/5	0
0	Z	5	0	0	0	1	1	1

В силу того, що одержаний оптимальний розв'язок допоміжної задачі не задовільняє умові цілочисельності, оптимальне рішення вихідної задачі поки що не знайдено.

Маємо три змінні - x_1, x_2 та x_3, які в оптимальному розв'язку виражені дробовими числами.

$$x_1 = \frac{1}{5};\ x_2 = \frac{12}{5}\ \textit{та}\ x_3 = \frac{28}{5}.$$

Серед них вибираємо одну змінну, що має найбільшу дробову частину.

Дробові частини змінних x_1, x_2 та x_3 визначаються як $x_i - [x_i] = q_i$. Маємо

$$[x_1] = \left[\frac{1}{5}\right] = 0;\ [x_2] = \left[\frac{12}{5}\right] = 2\ \textit{та}\ [x_3] = \left[\frac{28}{5}\right] = 5\ \text{тоді}$$

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= x_1 - [x_1] = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}; \\ q_2 &= x_2 - [x_2] = \frac{12}{5} - 2 = \frac{2}{5}; \\ q_3 &= x_3 - [x_3] = \frac{28}{5} - 5 = \frac{3}{5} \end{aligned}\right\rangle \quad \max\ \{q_i\} = max\left\{\frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right\} = \frac{3}{5}.$$

Отже, додаткові обмеження будуємо для змінної x_3.

Використавши елементи x_3-рядка, визначаємо відповідні дробові частини як $x_{ij} - [x_{ij}] = q_{ij}$.

Маємо $[x_{31}] = 0;\ [x_{32}] = 0;\ [x_{33}] = 1;\ [x_{34}] = \left[\frac{1}{5}\right] = 0;\ [x_{35}] = \left[\frac{3}{5}\right] = 0$

та $q_{31} = 0;\ q_{32} = 0;\ q_{33} = 1 - 1 = 0;\ \underline{q_{34} = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}};\ \underline{q_{35} = \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5}}.$

Тоді додаткове обмеження має вигляд:

$$q_{34}x_4 + q_{35}x_5 - q_3 \geq 0\quad \textit{або}\quad \frac{1}{5}x_4 + \frac{3}{5}x_5 - \frac{3}{5} \geq 0$$

Остання нерівність перетворюється в рівняння уведенням додаткової невід'ємної змінної x_6.

Маємо $\frac{1}{5}x_4 + \frac{3}{5}x_5 - x_6 = \frac{3}{5}$ або $-\frac{1}{5}x_4 - \frac{3}{5}x_5 + x_6 = -\frac{3}{5}$.

Остання симплекс-таблиця (табл. 3) представляється у вигляді

Таблиця 4

Рядок	$x_Б$ (базис)	C (const)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z
1	x_3	28/5	0	0	1	1/5	3/5	0	0
2	x_2	12/5	0	1	0	3/5	2/5	0	0
3	x_1	1/5	1	0	0	-1/5	1/5	0	0
4	x_6	-3/5 1	0 0	0 0	0 0	-1/5 1/3	-3/5 1	1 -5/3	0 0

$\times(-\frac{5}{3});(-\frac{3}{5});(-\frac{2}{5});(-\frac{1}{5});(-1)$

0	Z	5	0	0	0	1	1	0	1

Застосувавши подвійний симплекс-метод, одержуємо наступний допустимий розв'язок (див. табл. 5).

Таблиця 5

Рядок	***$x_Б$* *(базис)***	**C *(const)***	***x_1***	***x_2***	***x_3***	***x_4***	***x_5***	***x_6***	***Z***
1	x_3	5	0	0	1	0	0	0	0
2	x_2	2	0	1	0	7/15	0	2/3	0
3	x_1	0	1	0	0	-4/15	0	1/3	0
4	x_5	1	0	0	0	1/3	1	-5/3	0
0	Z	4	0	0	0	2/3	0	5/3	1

$\overrightarrow{X}_5 = \{0;2;5;0;1;0\}$ та $Z=4$.

Тому що одержаний розв'язок задовольняє умові цілочисельності, оптимальне рішення одержано. $Z_{max} = 4$.

Завдання для самостійної роботи

В завданнях 1-5 знайти цілочисельні розв'язки кожної задачі лінійного програмування

1. $f = 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \ge 5 \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \quad x_j$ – ціле, $j = \overline{1,3}$

2. $f = -2x_1 - 5x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \le 9 \\ 2x_1 + 8x_2 \le 31 \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \quad x_j$ – ціле, $j = \overline{1,3}$

3. $f = -38x_1 - 20x_2 - 41x_3 - 35x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \le 32 \\ -3x_3 + 5x_4 \le 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \le 17 \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \quad x_j$ – ціле, $j = \overline{1,3}$

4. $f = x_1 + 4x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6\,\frac{1}{3} \\ x_1 + 3x_2 \le 4 \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \quad x_j$ – ціле, $j = \overline{1,3}$

5. $f = 7x_1 + x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 110 \\ 11x_1 - 3x_2 - x_4 = 24 \\ 2x_1 - 7x_2 - x_5 = 15 \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \quad x_j$ – ціле, $j = \overline{1,3}$

Питання для самоконтролю

1. Цілочисельні задачі лінійного програмування.
2. Алгоритм методу Гоморі. Умова відтинання у методі Гоморі.

3. Поняття про метод віток і гілок.

Література: 11, С.153-173.

Розділ 11. Дослідження операцій

Тема 42. Предмет та задачі дослідження операцій

1.Економіко-математичні моделі: загальні уявлення. Класифікація економко-математичних моделей.

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, який містить наступні питання: іконічні моделі, моделі-аналоги та символічні або математичні моделі.

Термінологічний словник ключових понять

Іконічні моделі використовуються для того, щоб наглядно представити те, що пропонується.

Архітектурну модель житлового комплексу або планетарій як представлення небесної сфери тощо є прикладами наглядних або іконічних моделей.

Моделі-аналоги співставляють певні властивості об'єктів, що моделюються, з відповідними характеристиками інших об'єктів але останні при цьому можуть бути наглядно представлені. Наприклад, поняття температури можна описати за допомогою графіка, на якому величина градуса еквівалентна точно визначеній одиниці відстані. Або поняття часу можна представити у вигляді руки, що вказує на годинник тощо.

Математична модель представляє умовний образ зображення об'єкту побудованого для спрощення його дослідження, у вигляді абстрактних символів.

Наприклад, відоме рівняння Ейнштейна $e=mc^2$ встановлює у вигляді символів, що енергія $с$, яка міститься в масі m, прямо пропорційна швидкості світла. Ця модель є прикладом детермінованої математичної моделі.

Модель, що являє собою сукупність математичних співвідношень, називають математичною.

Моделі, що розробляються з метою передбачення майбутнього, називають ***прогнозними***. Зокрема, при системному дослідженні економіки за допомогою математичних моделей виділяють макро та мікромоделі. ***Макроекономічні моделі*** – це моделі, що відображають функціонування економіки як єдиного цілого.

Мікроекономічні моделі – це моделі, що пов'язані, як правило з такими підрозділами економіки як підприємства та фірми. Прикладами макроекономічних моделей є моделі прогнозування валового національного продукту або прогнозування рівня безробіття, що передбачає певний обсяг федеральних витрат або чітко визначену монетарну політику. Транспортні, сітьові моделі, моделі теорії ігор тощо є прикладами мікроекономічних моделей. Модель може бути нормативною і базуватись на оптимізації. При цьому вона використовується як допоміжний засіб допустимих розв'язків певних проблем та відповідного аналізу з метою для одержання досягнення оптимального рішення.

Основні елементи моделей

Математична модель – це система математичних співвідношень, що наближено у абстрактній формі описує досліджуванний процес, даючи не тільки статистичну, а й динамічну інформацію про об'єкт.

Підібравши підходящі моделі до аналізу реально існуючих ситуацій можна спрогнозувати певні наслідки нашої діяльності або визначити варіанти поведінки досліджуваної системи як відгук на впровадження спеціальних альтернативних рішень (заходів).

В більшості випадків реалізація моделі надає можливість визначити краще або оптимальне рішення.

Моделі, що використовуються в прийнятті управлінських рішень, як правило, побудовані на емпіричній інформації кількісного характеру. При цьому, взаємозалежність чинників, що формують модель, представлені у вигляді фіксованих числових значень.

Основними компонентами математичних моделей є змінні та взаємозалежності факторів, що включені в модель.

Змінні, що включені в модель, можуть представляти:

1) величини, що у вигляді ряду числових значень характеризують наприклад, реально існуючі рівні банківських вкладень, розподілу бюджетних асигнувань, результати проведених опитувань громадської думки, фізичних експериментів тощо;

2) коди, що упорядковують за певним правилом (критерієм) наприклад, проекти, об'єкти, заявки, населення, групи, пропозиції тощо.

Зауваження. Код може прийняти значення 0, якщо, наприклад, проект, що розглядається, не забезпечено державними гарантіями у вигляді цінних паперів, та 1 в протилежному випадку.

Взаємозалежності чинників математичної моделі, як правило, відображаються у вигляді рівнянь, певних обмежень, на основі яких і реалізуються певні обчислюванні алгоритми по визначенню можливих значень одних факторів (змінних) при умові виявлених тенденцій динаміки інших чинників. Або визначення можливої динаміки певного економічного показника в майбутньому на основі існуючих закономірностей його функціювання.

Зазначимо, що обчислювальні процедури закладені в математичну модель, описують в певному наближенні реальні взаємозалежності, що існують між економічними чинниками. Наприклад, взаємозалежність між попитом на певний товар та його ціною або оцінка ефекту інформаційного впливу однієї групи на інші тощо.

Як правило, змінні, що включені в модель, можна розподіляються на 4 категорії:

1. Регульовані або керовані змінні. Це змінні, числові значення яких, можуть бути визначені в процесі прийняття певних рішень.

2. Нерегульовані змінні.

Змінні, значення яких задаються зовні і не можуть контролюватись особою, що приймає рішення.

3. Результуючі або вихідні змінні. Змінні, що характеризують результати функціонування досліджуваного процесу, називають вихідними.

4. Корисні або значущі змінні (величини) моделі. Особа, що приймає рішення визначає множину значущих змінних, що відображає її інтереси у формалізованому вигляді.

Величини (значущі змінні) вважають функцією від контрольованих та неконтрольованих змінних. Динаміка неконтрольованих змінних обумовлена ступенем впливу численних випадкових факторів, тому її точна оцінка практично неможлива.

Хоча іноді можливі випадки, коли відхилення в оцінці неконтрольованих змінних незначне, що дає підставу стверджувати, що ця змінна набуває точно визначених значень. Це веде до появи, так званих, детермінованих моделей, у яких значення неконтрольованих змінних вважається визначеним в силу припущення про наявність жорстких функціональних взаємозалежностей між змінними.

Але часто оцінки неконтрольованих змінних досить складно визначити і тоді виникає необхідність у стохастичних моделях.

Стохастичні моделі припускають наявність неконтрольованих випадкових впливів на досліджувані показники і використовують інструментарій теорії ймовірностей та математичної статистики для їх опису.

Значущі змінні моделі як правило, представляють у вигляді формули, що визначає цільову функцію як показник або міра ефективності.

Математичні моделі прийняття рішень

Загальна математична модель може бути представлена в компактному формальному вигляді.

При цьому, множину контрольованих змінних позначаємо $X = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$, тобто в моделі n контрольованих (регульованих) змінних.

Наприклад, підприємець повинен визначити, яку кількість одиниць продукції необхідно виробити в кожну із n=5 наступних тижнів.

Тому, x_j – змінна, що позначає рівень виробництва певної продукції впродовж j-ого тижня, де j =1,2,3,4,5. Зазначимо, що підприємець повинен визначити певні рівні для цих п’яти змінних. Неконтрольовані змінні цієї міні-проблеми інтерпретують як можливий обсяг щотижневих рівнів виробництва і позначають y_j.

Стосовно, проблеми підприємця, значення y_j., $j=\overline{1,5}$ можна вважати величиною очікуваних потреб споживачів, які необхідно задовольнити j–им щотижневим рівнем виробництва.

Формалізація процесу прийняття управлінських рішень.

В загальному вигляді, покладаємо, що $y = \{y_1; y_2; \ldots; y_m\}$ представляють m різних неконтрольованих змінних, які необхідно врахувати в процесі моделювання. Міра (показник) ефективності або цільова функція в моделях прийняття рішень, позначена як Z, представляє можливий варіант взаємозалежностей між неконтрольованими змінними та деякими вибраними значеннями контрольованих змінних. Це може бути представлено у вигляді формального запису

$$Z = f\left(x_1,\ldots,x_n, y_1,\ldots,y_m\right). \qquad (1)$$

Мета задач, пов’язаних із прийняттям рішень, полягає у визначенні значень контрольованих змінних, які приводять до оптимального значення цільової функції.

Зауважимо, що вибір кожної з змінних (x_j) обумовлено обмеженнями поставленої проблеми, тому математична модель може бути представлена в наступній формі, а саме:

Знайти оптимальне значення

$$Z = f\left(x_1, x_{2,},\ldots,x_n, y_1, y_2,\ldots,y_m\right) \rightarrow \max(\min),$$

що задовольняє системі обмежень

$$\begin{cases} g_i\left(x_1, x_2,\ldots x_n\right) \le b_i \\ \varphi_j\left(y_1, y_2,\ldots y_m\right) \le c_j \\ \quad j=\overline{1,m} \\ x_1, x_2,\ldots x_n \ge 0 \\ y_1, y_2,\ldots y_m \ge 0 \end{cases}. \qquad (2)$$

Розглянемо більш детально процес прийняття рішень в покроковому режимі.

Процес прийняття рішень базується перш за все на статистичній інформації за декілька попередніх періодів, на основі якої і будується математична модель та приймаються відповідні управлінські рішення.

В основі цього процесу – ряд взаємоузгоджених кроків, що адаптують наукові методи до проблем прийняття рішень.

При цьому при розв’язанні проблем, що потребують прийняття відповідних рішень, необхідно реалізувати наступні кроки, а саме:

1. Постановка проблеми.
2. Розробка або адаптація відомої математичної моделі до проблеми дослідження.
3. Одержання на основі моделі альтернативних рішень.
4. Тестування адекватної моделі та аналіз одержаних результатів.
5. Коригування одержаних розв’язків на основі додаткових модельних припущень.
6. Практичне застосування результат в процесі прийняття рішення.

Застосування математичного моделювання, однієї із центральних позицій в методології прийняття рішень, передбачає глибоке розуміння суті поставленої проблеми на основі її поєднання з аналізом наслідків при оцінці та порівняння кожного із можливих варіантів системи альтернативних рішень. Це допомагає оцінити ефект від впливу скорегованої величини економічного показника на динаміку всіх останніх, що надає можливість наукового обґрунтування в прийнятті певного управлінського рішення згідно поставленої проблеми дослідження.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

2 Математичні методи в прийнятті управлінських рішень
Постановка задачі виробничої міні-ситуації.

Приклад 52. Виробнича компанія по виготовленню меблів намагається визначити, в якій кількості доцільно виробити стільців та столів щоб оптимально розподілити ресурси підприємства. Компанія у своєму розпорядженні має 400 футів спеціальних пластин червоного дерева та 450 трудо-годин майстрів виконання всіх робіт. На виготовлення одного стільця та столу необхідно 5 та 20 футів дерев'яних пластин відповідно. Процес виробництва стільця вимагає 10 годин, для столу – 15 годин роботи майстрів. Компанія одержує прибуток в розмірі 45 (грн.) на кожному стільці та 80 (грн.) на столі відповідно.

Побудувати математичну модель виробничої ситуації, знайти оптимальну програму виробництва, при якій прибуток підприємства буде максимальним.

Розв'язання. Задану інформацію представимо у вигляді таблиці.

Таблиця 1

Види ресурсів підприємства	**Витрати ресурсів підприємства на одиницю продукції**		**Обсяг ресурсів**
	стілець	**стіл**	
Пластини дерева	5	20	400
Працегодини	10	15	450
Прибуток за одиницю продукції (грн.)	45	80	

Побудова математичної моделі виробничої ситуації.

Для побудови математичної моделі введемо позначення.

Нехай x_1 – кількість виготовлених стільців;

x_2 – кількість виготовлених столів;

$$x_1 \geq 0;\ \ x_2 \geq 0.$$

Необхідно максимізувати прибуток підприємства, тобто знайти максимальне значення функції: $f=45x_1+80x_2 \to max$.

Що задовольняє системі обмежень:

$$\begin{cases} 5x_1 + 20x_2 \leq 400 \to обмеження\ на\ запаси\ деревини; \\ 10x_1 + 15x_2 \leq 450 \to обмеження\ на\ працегодини\ майстрів; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Реалізація математичної моделі.

Виконавши графічний метод розв'язання задач лінійного програмування, одержимо оптимальний розв'язок задачі

I. (1): $5x_1 + 20x_2 = 400$ (2): $10x_1 + 15x_2 = 450$

(1)

x_1	x_2
0	20
80	0

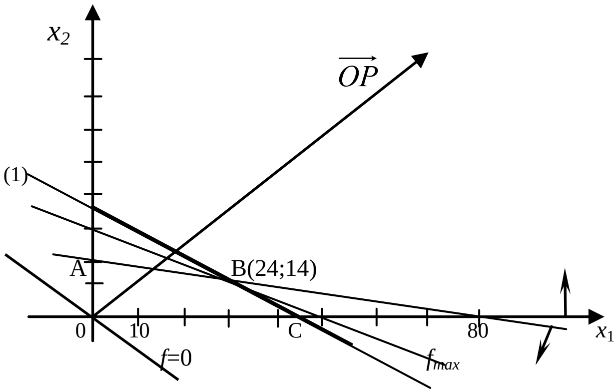
(2)

x_1	x_2
0	30
45	0

II. $\overrightarrow{OP}(45;80)$

III. f=0

IV.



$$\begin{cases} 5x_1 + 20x_2 = 400 & \times(-2) \\ 10x_1 + 15x_2 = 450 & \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10x_1 - 40x_2 = -800 \\ 10x_1 + 15x_2 = 450 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -25x_2 = -350 \\ x_2 = 14 \ \ i \ \ x_1 = 24 \end{matrix}$$

f_{max}=45·24+80·14=1080+1120=2200 (грн).

Отже, оптимальне рішення виробничої проблеми становить 24 стільці та 14 столів. При цьому підприємство повністю використовує всі свої ресурси. Це підтверджується тим, що нерівність-обмеження на запаси сировини, тобто $5x_1 + 20x_2 \le 400$ при підстановці оптимальних значень змінних перетворюється в рівність 5·24+20·14=400. Аналогічний результат одержуємо і для другого обмеження: 10·24+15·14=450.

Практичне використання двоїстих оцінок в аналізі економічних задач

При цьому у аналітика виникають “В якій мірі збільшення ресурсів підприємства обумовлює позитивні зміни в його прибутку”? Або “Чи можна збільшити прибуток підприємства змінюючи тільки асортимент продукції, наприклад, додатково виготовляючи ще й письмові столи”?

З питаннями подібного типу постійно зустрічаються аналітики виробничих підприємств. Відповіді на ці та аналогічні питання можна одержати, застосувавши маргінальний аналіз на основі економічної інтерпретації теорем подвійності лінійного програмування.

Вважаємо, що одержана математична модель відповідає прямій задачі ЛП. До неї можемо побудувати подвійну задачу ЛП.

Отже, необхідно знайти мінімальне значення оцінки ресурсів підприємства, що задовольняє певній системі обмежень,

$$z = 400y_1 + 450y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 5y_1 + 10y_2 \ge 45 \\ 20y_1 + 15y_2 \ge 80 \\ y_j \ge 0;\ j = \overline{1,2} \end{cases}.$$

де: y_1 – невідома величина умовної оцінки (розрахункова вартість) ресурсів деревини;

y_2 - невідома величина умовної оцінки трудових ресурсів.

Розв'язуючи цю задачу, одержуємо її оптимальний розв'язок: y_1=1 y_2=4, тобто відповідні оцінки ресурсів підприємства в перерахунку на одну одиницю – 1 грн та 4 грн відповідно. При цьому оптимальне значення цільової функції дорівнює z=2200 (грн.).

Елементи маргінального аналізу

Як уже вказувалось, змінні y_1та y_2 позначають умовні подвійні оцінки одиниці ресурсів, відповідно I та II видів. Ці оцінки відмінні від нуля, тобто ресурси обох видів повністю використовуються при оптимальному плані виробництва продукції. Згідно результатів одержаних при розв'язанні прямої задачі, оптимальний розв'язок вимагає, щоб вироблялись обидва типи продукції: і стільці, і столи. Підтвердження цього ми знаходимо при аналізі оптимальних розв'язків подвійної задачі.

Підставивши оптимальні значення змінних $y_1=1$ та $y_2=4$ в систему обмежень-нерівностей подвійної задачі, одержуємо строгі рівності.

$$\begin{pmatrix} 5\cdot 1 + 10\cdot 4 - 45 = 0 \\ 20\cdot 1 + 15\cdot 4 - 80 = 0 \end{pmatrix}$$

Це означає, що подвійні умовні оцінки ресурсів підприємства, які використовуються для виробництва одиниці певної продукції)в нашому випадку, стільці та столи) повністю співпадають з їх вартістю. Тому випускати саме ці два види продукції економічно доцільно, що і передбачено оптимальним планом прямої задачі.

Можна перевірити одержані висновки, проаналізувавши подібним чином доцільність розширення асортименту продукції до трьох видів (додавши, наприклад, письмові столи).

Нехай, наприклад, очікуваний прибуток підприємства від виготовлення одного письмового столу дорівнює 110 грн. При цьому витрати ресурсів на виробництво письмового столу становить 15 одиниць деревини та 25 працегодин майстрів. Чи доцільно підприємству починати виробництво нового виду продукції?

Для того, щоб відповісти на останнє обмеження-нерівність подвійної задачі, а саме:

$$15y_1 + 25y_2 \ge 110.$$

Підставимо в додаткове обмеження оптимальні значення подвійних змінних: y_1=1 y_2=4. Маємо 15·1+25·4-110=5>0.

Одержали строгу нерівність. Це означає, що подвійна оцінка ресурсів, що використовується на виробництво одного письмового столу більша вартості цього виду продукції, тобто виробляти цей вид продукції підприємству невигідно.

3 Математичний аналіз в прийнятті управлінських рішень

Загальні підходи до аналізу чутливості математичних моделей.

Чутливість математичних моделей ЛП передбачає аналіз наступних позицій, а саме:

1) коефіцієнтів цільової функції;
2) системи обмежень;
3) технологічних коефіцієнтів моделі.

Як правило, для економічних ситуацій, пов'язаних з виробництвом продукції, коефіцієнти цільової функції представляють величини прибутків, очікуваних підприємством за реалізацію одиниці продукції певного виду. Тому стосовно першої позиції постає декілька питань: 1) Чи можна визначити гранично допустимі коливання величини прибутку, при яких оптимальне рішення поставленої проблеми залишиться таким же, тобто не зміниться? 2) Як зміниться оптимальний розв'язок, якщо виробник вирішить збільшити (або зменшити) величину гранично допустимого прибутку?

Стосовно другої позиції, то з урахуванням, що система обмежень моделі пов'язана із наявними виробничими ресурсами підприємства, виникає необхідність визначення граничного допустимих варіацій величини цих запасів, при яких виробнича діяльність залишиться оптимальною.

Аналізуючи третю позицію, необхідно мати на увазі, що, як правило, технологічні коефіцієнти відображають виробничі норми витрат ресурсів на одиницю виробленої продукції. Але, якщо відбуваються змінив технологічному процесі виробництва продукції, (новий технологічний процес, нове обладнання тощо) то це може привести до дещо змінених величин технологічних норм витрат. Отже, в цьому випадку доцільно виявити чи зміниться оптимальний розв'язок поставленої проблеми?

Розглянемо детально аналіз чутливості на математичній моделі уже відомої виробничої ситуації, пов'язаної із виготовленням меблевої продукції.

Математична модель задачі має вигляд: f=45x_1+80x_2

якщо $\begin{cases} 5x_1 + 20x_2 + x_3 = 400 \\ 10x_1 + 15x_2 + x_4 = 450. \\ x_i \ge 0; i = \overline{1,4} \end{cases}$

де: x_1 – число виготовлених стільців;

x_2 – число виготовлених столів;

x_3 ,x_4 – додаткові невід'ємні змінні, що перетворюють систему обмежень-нерівностей в систему рівнянь.

Нагадаємо, що прибуток від виготовлення стільця та стола дорівнює 45 грн. та 85 грн. відповідно за одиницю продукції.

Основні етапи аналізу математичної моделі на чутливість.

По-перше, проаналізуємо ситуацію, якщо гранична величина прибутку за одну одиницю виготовленої продукції (наприклад, стільця) буде змінена.

Для цього граничну величину прибутку в 45 грн. змінимо на ($45+\alpha_1$)грн., де, α_1 може прийняти будь-яке значення. Тоді цільова функція прийме вигляд

$$f=(45+\alpha_1)x_1+80x_2$$

$$f-(45+\alpha_1)x_1-80x_2=0.$$

Вважаємо α_1 параметром і тому значення α_1 при використанні алгоритму симплекс-методу вводиться у вихідну симлекс-таблицю і зберігається до оптимальної.

Для задачі, що розглядається, наведемо вихідну симплекс-таблицю.

рядок	$x_б$	**рішення**	x_1	x_2	x_3	x_4	f
1	x_3	400	5	20	1	0	0
2	x_4	450	10	15	0	1	0
0	f	0	$-45-\alpha_1$	-80	0	0	1

Оптимальна симплекс-таблиця має вигляд:

рядок	$x_б$	**рішення**	x_1	x_2	x_3	x_4	f
1	x_2	14	0	1	2/25	-1/25	0
2	x_1	24	1	0	-3/25	4/25	0
0	f	$2200+24\alpha_1$	0	0	$1-3/25\alpha_1$	$4+4/25\alpha_1$	1

Одержаний розв’язок оптимальний, тобто x_1=24 та x_2=14, якщо всі елементи в 0-рядку невід’ємні числа.

Тому, будь-яке числове значення α_1, повинно задовольняти системі нерівностей.

$$\begin{cases} 1-\dfrac{3}{25}\alpha_1\ge 0 \\ 4+\dfrac{4}{25}\alpha_1\ge 0 \end{cases} \Rightarrow -25\le\alpha_1\le\frac{25}{3}.$$

Отже, визначимо як зміниться величина цільової функції, якщо $-25\le\alpha_1\le\frac{25}{3}$. Зазначимо, що коефіцієнт змінної x_1 , як прибутку, варіюється між $45+\frac{25}{3}=\frac{160}{3}$ та

45-25=20.

І тому, значення цільової функції $f=2200+24\alpha_1$ з урахуванням можливих значень α_1 задовольняє нерівність $1600\le f\le 2400$.

Аналогічний аналіз можна здійснити при умові зміни граничної величини прибутку за одну одиницю виготовленого стола вважаючи її рівною ($80+\alpha_2$).

Пропонується провести його самостійно визначивши інтервал зміни величини.

Продовжимо далі аналіз моделі на чутливість і оцінимо ефект впливу змінених величин ресурсів підприємства на оптимальний розв’язок поставленої задачі.

Приклади використання математичних методів в аналізі економічних задач

Отже, необхідно розв’язати декілька нових задач. Перша з них полягає в тому, щоб знайти $f=45x_1+80x_2 \to max$

якщо $\begin{cases} 5x_1 + 20x_2 + x_3 = 400 + q_1 \\ 10x_1 + 15x_2 + x_4 = 450 \\ x_j \geq 0;\ j = \overline{1,4} \end{cases}$.

де q_1 – параметр, що характеризує величину зміни ресурсу I виду і може прийняти будь-яке числове значення.

Друга задача має вигляд:

Знайти $f=45x_1+80x_2 \to max$

якщо $\begin{cases} 5x_1 + 20x_2 + x_3 = 400 \\ 10x_1 + 15x_2 + x_4 = 450 + q_2 \\ x_j \geq 0;\ j = \overline{1,4} \end{cases}$.

де q_2- параметр, що визначає величину зміни ресурсу другого виду і може приймати будь-яке числове значення.

Розв’яжемо першу задачу симплекс-методом.

Вихідна симплекс таблиця має вигляд.

рядок	$x_б$	**рішення**	x_1	x_2	x_3	x_4	f
1	x_3	$400+q_1$	5	20	1	0	0
2	x_4	450	10	15	0	1	0
0	f	0	-45	-80	0	0	1

Наведемо повністю оптимальну симплекс таблицю для даної задачі.

рядок	$x_б$	**рішення**	x_1	x_2	x_3	x_4	f
1	x_2	$14+2/25q_1$	0	1	2/25	-1/25	0
2	x_1	$24-3/25\ q_1$	1	0	-3/25	4/25	0
0	f	$2200+\ q_1$	0	0	1	4	1

Оптимальний розв’язок $x_1 = 24 - \frac{3}{24}q_1$, $x_2 = 14 + \frac{2}{25}q_1$ при цьому $f=2200+q_1$.

Якщо $q_1=0$, маємо попереднє значення величини оптимального розв’язку.

Для того, щоб отримані вирази базисних змінних x_1 та x_2 задовольняли умові допустимості, необхідно накласти на них умову невід’ємності, тобто маємо

$$\begin{cases} x_1 = 24 - \frac{3}{25}q_1 \geq 0 \\ x_2 = 14 + \frac{2}{25}q_1 \geq 0. \end{cases}$$

При цьому, одержуємо інтервал можливих значень параметра q_1

$$-175 \le q_1 \le 200.$$

Отже, обсяг ресурсу І виду (деревини) може варіюватись від 400-175=225 одиниць до 400+200=600 одиниць.

Важливим є той наслідок, що з цього випливає: базисне рішення стосовно виробничої програми підприємства є допустимим і залишається оптимальним, якщо величини запасу деревини не вийде за межі (225,600) одиниць. Безумовно кількість стільців *(x_1)* та столів *(x_2)*,які будуть виготовлені підприємством, залежатимуть від величини q_1.

Завдання для самостійної роботи

1.Компанія випускає дві моделі радіогодинників А та В: модель А потребує 15 + α_1 хвилин виробничого часу І-ї автоматичної лінії і 10 + α_2 хвилин – другої лінії. Для моделі В необхідно 10 + β_1 хвилин роботи І-ї автоматичної лінії та 12 + β_2 хвилин І-ї лінії. Виробничий час за один день для І-ї автоматичної лінії не перевищує 18 + c_1, другої лінії 15 + c_2. Розрахунки показують, що компанія може одержати 12 + і грн прибутку від реалізації моделі А та 10 + і грн від реалізації моделі В. Знайти оптимальну кількість моделей кожного виду, що може випустити компанія за один день, щоб її прибуток був оптимальним.

а) і = 5; $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 2$; $\beta_1 = \beta_2 = 2$; $c_1 = 5$; $c_2 = 2$;

б) і = 2; $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 1$; $\beta_1 = 1$; $\beta_2 = 2$; $c_1 = 3$; $c_2 = 1$;

в) і = 3; $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 3$; $\beta_1 = \beta_2 = 1$; $c_1 = 2$; $c_2 = 3$.

Побудувати математичні моделі до заданої та подвійної задачі попередньо її сформулювавши. Знайти оптимальні рішення обох задач. Використавши маргінальний аналіз, оцінити організацію виробничого процесу компанії.

Питання для самоконтролю

1. Етапи розв’язання задач з використанням математичних методів.
2. Поняття економіко-математичної моделі та моделювання.
3. Поняття математичної моделі операції.

Література: 11, С.200-245.

Тема 43. Оптимізаційні задачі управління запасами

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, який містить наступні питання: Міні-версія транспортно-виробничої проблеми, транспортна задача.

План практичного заняття

1.Математичні моделі.

2. Розв’язання поставленої проблеми як транспортної задачі.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Міні-версія транспортно-виробничої проблеми

Приклад 55. Холодильники виробляються на двох підприємствах компанії і постачаються в три спеціалізовані магазини. На початку кожного місяця компанія-виробник одержує інформацію від менеджерів про кількість недопоставлених одиниць товару, які повинні бути покриті виробництвом певної кількості холодильників. Множина заявок, отриманих від відповідних магазинів, формує величину замовлення на холодильники на наступний місяць. Будемо вважати, що компанія-виробник має достатню кількість ресурсів, щоб виконати замовлення, але при цьому не допускає перевиробництва продукції, тому що не має складських приміщень. При цьому, місячні потреби I магазину (S_1) становлять 10 холодильників, тоді як II-(S_2) та III –(S_3) дорівнюють 8 та 7 холодильників відповідно. Отже, сумарна місячна потреба в холодильниках становить 25 одиниць продукції. Компанія вирішила на першому підприємстві (F_1) виробляти 11, на другому (F_2) – 14 холодильників. Транспортні витрати від підприємства до кожного із спеціалізованих магазинів на доставку одиниці продукції представлено в таблиці.

	S_1	S_2	S_3
F_1	80	60	100
F_2	90	50	70

Необхідно скласти такий план перевезень холодильників від підприємств до магазинів, щоб транспортні витрати при цьому були мінімальні.

Побудова математичної моделі.

Розв'язання. Для побудови математичної моделі введемо позначення: Нехай x_{11} – кількість холодильників, транспортованих із підприємства F_1 до магазину S_1;

x_{12} кількість холодильників, транспортованих із підприємства F_1 до S_2, В загальному вигляді x_{ij} – кількість холодильників, транспортованих із підприємства F_i до S_j, де $i=1,2$ та $j=1,2,3$.

1. Сумарна кількість одиниць продукції, що транспортується з F_1 дорівнює 11, або в загальному вигляді:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=11$$

аналогічно для підприємства F_2

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=14$$

2. Потреби в цій продукції

$$x_{11}+x_{21}=10 \text{ для } S_1$$
$$x_{12}+x_{22}=8 \text{ для } S_2$$
$$x_{13}+x_{23}=10 \text{ для } S_3$$

3. Сумарні затрати від перевезень

$$f=80x_{11}+60x_{12}+100x_{13}+90x_{21}+50x_{22}+70x_{23} \text{ (грн)}$$

4. Числові значення змінних: x_{ij} повинні бути невід'ємними, тобто $x_{ij} \geq 0$.

З математичної точки зору необхідно знайти множину числових значень відповідних змінних x_{ij} , що задовольняють систему обмежень та мінімізують функцію витрат. Отже, одержана математична модель, що вимагає прийняття рішення, яку можна розглянути як транспортну задачу, а саме:

Знайти множину змінних $x_{ij} \geq 0$, при якій

$$f=80x_{11}+60x_{12}+100x_{13}+90x_{21}+50x_{22}+70x_{23} \to \min.$$

Побудуємо модель

$$\text{Якщо} \begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13} = 11 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23} = 14 \\ x_{11}+x_{21} = 10 \\ x_{12}+x_{22} = 8 \\ x_{13}+x_{23} = 7 \end{cases}$$

Зауваження 1. Побудована математична модель може інтерпретуватись наступним чином:

1. x_{ij} – керовані (контрольовані) змінні;
2. величини пропозицій підприємств та потреб магазинів – нерегульовані змінні;
3. множина допустимих рішень моделі визначається системою відповідних рівнянь-обмежень та умовою невід'ємності змінних;
4. мінімальне значення сумарних транспортних витрат характеризує міру ефективності моделі.

Побудована математична модель – це транспортна модель лінійного програмування. Отже, для знаходження її оптимального розв'язку використовуємо алгоритм транспортної задачі.

Розв'язання поставленої проблеми як транспортної задачі.

Вихідну інформацію задачі подамо у вигляді транспортної таблиці.

Таблиця 1

магазин / підприєм.		S_1	S_2	S_3	
		10	8	7	
F_1	11	80 10	60 80 +	100 -1	u_1=100
F_2	14	90 50	$\boxed{50}$ 8 -	70 +6	u_2=70
		v_1=-20	v_2=-20	v_3=0	

1) $\sum_{i=1}^{2} a_i = 11+14 = 25$; $\sum_{j=1}^{3} b_i = 10+8+7 = 25$; $\sum a_i = \sum b_j$.

2) $f_1 = 80\cdot 10+100\cdot 1+50\cdot 8+70\cdot 6 = 1720$ (грн)

Таблиця 2

магазин / підприєм.		S_1	S_2	S_3	
		10	8	7	
F_1	11	80 10	60 1	100 80	u_1=60
F_2	14	90 70	50 7	70 7	u_2=50

v_1=20 v_2=0 v_3=20

3) $f_2 = 800 + 60 + 350 + 490 = 1700$

Оптимальне рішення x_{11}=10; x_{12}=1; x_{13}=0

x_{21}=0; x_{22}=7; x_{23}=7.

При цьому f_{min}=1700 (грн).

Для того, щоб впевнитись, що величина цільової функції моделі дійсно набула мінімального значення, застосуємо спеціальну методику її тестування.

Методика пошуку та аналізу оптимального рішення транспортно-виробничої проблеми.

Звернемо увагу на зауваження (позиції 1, 2).

Згідно умови нашої задачі сумарна місячна величина холодильників виготовлених підприємствами становить 25 одиниць. Нехай *k* холодильників виготовлено на I підприємстві, тоді (25-*k*) одиниць на II підприємстві.

В цьому випадку транспортна таблиця має наступний вигляд

магазин / підприєм.		S_1	S_2	S_3	
		10	8	7	
F_1	k	80 10	60 80	100 k-10	u_1=100
F_2	25-k	90 50	50 8	70 17-k	u_2=70
		v_1=-20	v_2=-20	v_3=0	

f_1=800+100k-1000+400+1190-70k=1390+30k, якщо k>0.

магазин / підприєм.		S_1	S_2	S_3	
		10	8	7	
F_1	k	80 10	60 k-10	100 *80*	u_1=60
F_2	25-k	90 70	50 18-k	70 7	u_2=50
		v_1=20	v_2=0	v_3=20	

f_2=800+60k-600+900-50k+490=1590+10k, якщо k>0.

Згідно останньої таблиці маємо

$$\begin{cases} k - 10 \ge 0 \\ 18 - k \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \ge 10 \\ k \le 18 \end{cases}.$$

Одержана модель лінійного програмування.

Знайти f=1590+10$k \to min$

Якщо $\begin{cases} k \ge 10 \\ k \le 18 \\ k \ge 0 \end{cases}$ $\quad k = \{10, 11, 12, \ldots, 18\}$, $k = 10 \to \min$ *значення*,

Тому f=1590+100=1690 , отже оптимальне значення цільової функції 1690, що менше ніж 1700.

x_{11}=10; x_{12}=0; x_{13}=0
x_{21}=0; x_{22}=8; x_{23}=7.

Це означає, що якщо компанія-виробник вибере інший варіант організації виробничого процесу холодильників (F_1=10 та F_2=15), для даної виробничої ситуації будуть одержані менші транспортні витрати.

Можна продовжити цей аналіз, розглядаючи рівень потреб кожного із магазинів як керовану змінну (тобто введенням параметра k) ы перевірити оптимальність одержаного рішення ы т.д. пропонуємо провести цей аналіз самостійно.

Завдання для самостійної роботи

Для випуску музичних інструментів фірма використовує дві фабрики (фабрику I, фабрику II). Кількість виготовлених інструментів за місяць на I фабриці становить 300 + і, тоді як на II – 250 + і. Ці музичні інструменти транспортуються в три дистриб'юторські центри компанії А, В, С відповідно. Замовлення дистриб'юторського центру А становить 200 + і музичних інструментів на місяць, центру В – 150 + і та центру С 200 + і відповідно. Транспортні витрати на одиницю товару з I-ї фабрики до центру А, В та С дорівнюють 60 + α_1, 60 + α_2 та 80 + α_3 грн відповідно. Транспортні витрати на одиницю товару з II-ї фабрики до центру А, В та С дорівнюють 80 + β_1, 70 + β_2 та 50 + β_3 грн відповідно. Скласти такий план перевезень музичних інструментів, при якому транспортні витрати будуть мінімальними.

1. Розв'язати дану проблему, якщо:

а) і = 100; $\alpha_1 = 5$; $\alpha_2 = 5$; $\alpha_3 = 10$; $\beta_1 = 15$; $\beta_2 = 25$; $\beta_3 = 3$.

б) і = 200; $\alpha_1 = 5$; $\alpha_2 = 6$; $\alpha_3 = 7$; $\beta_1 = 10$; $\beta_2 = 15$; $\beta_3 = 20$.

в) і = 150; $\alpha_1 = 3$; $\alpha_2 = 4$; $\alpha_3 = 5$; $\beta_1 = 1$; $\beta_2 = 3$; $\beta_3 = 4$.

і знайти оптимальне рішення.

2. Перевірити одержане рішення на оптимальність введення параметру k (вважаємо, що обсяг виробництва фабрики I становить k одиниць продукції за місяць).

2. Оптимізаційні задачі управління запасами

Загальна постановка задачі.

Існують багато ситуацій, що вимагають застосування абстрактних математичних моделей для аналізу та прийняття відповідних управлінських рішень.

Розглянемо модель прийняття рішення для наступної ситуації.

Піццерія, що працює цілодобово, використовує в процесі готування піцци велику кількість томатного соку. Якщо запаси соку закінчуються, то виробничий процес зупиняється, поки запаси не поновляться. В силу того, що об'єм сховища для зберігання банок з томатним соком невеликий, власник завжди непокоїться, коли томатний сік закінчується. Власник заключив угоду з постачальником харчових продуктів, що коли запаси соку закінчуються, достатньо зателефонувати на склад і постачальник негайно повинен виконати замовлення піццерії.

Доставка продукції зі складу здійснюється цілодобово і зрозуміло, що власник піццерії зацікавлений в мінімізації загальних витрат, пов'язаних із створенням запасу томатного соку.

Будь-яка математична модель, яка використовується для аналізу певної ситуації в управлінні запасами, повинна враховувати фактори, пов'язані з витратами.

Розрізняють витрати трьох типів. Зокрема, для ситуації, яка аналізується; по-перше, це витрати (s), пов'язані із закупівельною ціною однієї банки томатного соку, по-друге, витрати (b), пов'язані з оформленням та виконанням замовлення; по-третє, витрати (h) на зберігання однієї банки томатного соку.

Витрати пов'язані з оформленням та виконанням замовлення, тобто організаційні витрати відносять до фіксованих витрат власника (оплата рахунків за телефонні розмови, оформлення та доставку товару). Витрати пов'язані із збереженням одиниці продукції в сховищі, в тому числі і ті, що виникають внаслідок амортизації, тобто продукція може втратити товарний вигляд, її кількість може зменшитись тощо. Крім того, це і витрати на страхування та податки. Проаналізуємо ситуацію щодо піццерії як задачу управління запасами, що полягає в знаходженні такої стратегії поповнення запасів томатного соку, при якій функція витрат прийме мінімальне значення.

Основна модель управління запасами.

Для спрощення математичної моделі вважаємо що обсяг поставки, тобто кількості банок томатного соку в одному замовленні, постійна величина.

Нехай обсяг поставки дорівнює q , де q – керована змінна, що приймає тільки додатні цілі значення.

Неконтрольований фактор, що визначається величиною попиту покупців, позначимо – g. В нашому випадку g – це кількість банок томатного соку, що в середньому споживається впродовж місяця. Вважаючи, що обсяг поставки не змінюється, а інтенсивність попиту – неперервна величина, розглянемо графік динаміки запасів. (Рис.22).

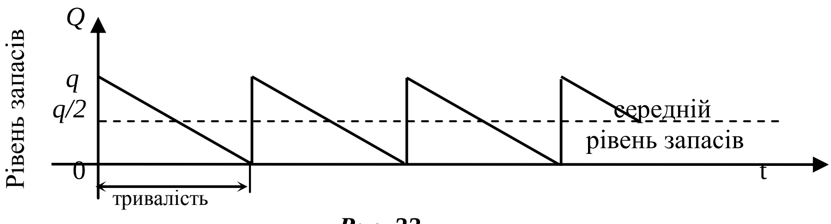


Рис. 22

Графік побудовано на припущенні, що величина початкового запасу становить q банок томатного соку і при цьому попит на нього задовольняється впродовж певного періоду. Помічаємо, величина запасу q

вичерпується після $\frac{g}{q}$ місяців. Період $\frac{g}{q}$ називають циклом по завершенні якого рівень запасів наближається до нуля. Отже, необхідно поновлювати замовлення на g банок соку з негайною його доставкою.

Необхідно побудувати модель прийняття рішення, на основі якої можна визначити величину q , що мінімізує середні витрати організації та управлінням системи запасів. Необхідну для цього інформацію представимо в таблиці 1.

Таблиця 1

Величина	Позна чення	Одиниця вимірювання	Припущення
Інтенсивність попиту	g	Одиниць товару за рік	Попит стабільний та неперервний, увесь попит задовольняється
Організаційні витрати	b	Грн. за рік	Витрати фіксовані, не залежать від обсягу поставки
Вартість товару	s	Грн. за рік	Ціна одиниці товару постійна, розглядається тільки один тип товару
Витрати зберігання товарів	h	Грн. за одиницю товару за рік	Вартість зберігання одиниці товару впродовж року не змінюється
Обсяг партії (поставки)	q	Одиниць товару в одній партії	Обсяг поставки стабільний, поповнення запасу відбувається миттєво, як тільки рівень запасу наближається до нуля

Вважаючи середній витрат як міру ефективності організації системи управління запасами, запишемо рівняння загальних витрат (C)

$$C=C_1+C_2+C_3=bg/q+sg+hg/2, \qquad (1)$$

де: C_1 – загальні організаційні витрати;

C_2 – вартість товарів;

C_3 – загальні витрати зберігання запасів.

Загальні витрати C можна розглядати як функцію від керованої змінної q та неконтрольованих змінних - g, b, s, h.

Для знаходження мінімума C знаходимо похідну dc/dq та прирівнюємо її до нуля

$$\frac{dc}{dq}=-\frac{bg}{q^2}+\frac{h}{2}=0. \qquad (2)$$

Формула Вілсона та її використання

Маємо
$$q_{опт}=\sqrt{\frac{2bg}{h}}, \qquad (3)$$

де: $q_{опт}$ - оптимальний розмір партії, що мінімізує С . Отже

$$\min C = \overline{C} = \frac{bg}{q_{опт}} + sg + \frac{1}{2} h q_{опт} . \qquad (4)$$

формула (3) відома як формула Вілсона, одного із основоположників теорії управління запасами. Її також називають формулою оптимального обсягу поставки.

Нехай для прикладу з піццерією відомо, що

$g=100$, $b=2$(грн), $h=1$ (грн), s=10(грн).

Застосувавши формули (3) та (4), знаходимо $q_{опт} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 100}{1}} = 20$.

та $\min C = \overline{C} = \frac{100 \cdot 2}{20} + 10 \cdot 100 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 20 = 1020$ (грн).

Модель виробничих запасів

В основній моделі управління запасами припускалось, що надходження продукції на склад відбувається миттєво, наприклад, протягом одного дня. Розглянемо випадок, коли продукція надходить на склад безпосередньо із виробничої лінії і цей процес неперервний. Така ситуація може бути формалізована на основі моделі виробничих поставок

Нехай p – інтенсивність надходжень продукції на склад. Всі інші позначення та припущення залишаються відповідними основній моделі управління запасами.

Визначимо оптимальний розмір партії, що мінімізує загальні витрати.

Загальні витрати, як і для основної моделі, становлять

$C=C_1+C_2+C_3$ де: $C_1=bg/q$ і $C_2=sg$.

Для одержання середнього рівня запасів необхідно враховувати, що $RT = (p-g)t$ - максимальний рівень запасів та $q = pt$ - кількість товарів в одній виробничій поставці.

Тоді середній рівень запасів становить половину максимального і дорівнює $\frac{(p-g)q}{2p}$. В результаті одержуємо

$$C = \frac{bg}{q} + sg + \frac{q(p-g)}{2p} .$$

Розв’язавши рівняння $dc/dq=0$ знаходимо оптимальний розмір партії виробничих поставок $q_{опт} = \sqrt{\frac{2pbg}{(p-g)h}}$.

3. Приклади застосування моделей управління запасами.

Використання математичних моделей управління запасами продемонструємо на наступних прикладах.

Приклад 56. Інтенсивність рівномірного попиту становить 2000 пилососів на рік. Організаційні витрати для однієї партії складають 20,000 грн. Ціна одиниці продукції дорівнює 1 тис. грн., а витрати на зберігання продукції становить0,1 тис.грн. в розрахунку на один пилосос за рік. Визначити оптимальний розмір партії, число поставок та тривалість циклу.

Розв'язання. За умовою задачі g=2000; b=20, s=1, h=0,1.

Загальні витрати впродовж року становлять:

$$C=C_1+C_2+C_3=40000/q+2000+q/20$$

$$\frac{dc}{dq}=-\frac{40000}{q}+\frac{1}{20};\ \frac{dc}{dq}=0$$

$$q_{опт}=\sqrt{800000}\approx 894$$

$$n_{опт}=\frac{2000}{q_{опт}}\approx 2,24; \qquad t_{опт}=\frac{365}{n_{опт}}\approx 163.$$

Інтерпретація. Оптимальний розмір партії складає 894 пилососи, число поставок – 2,24, тривалість циклу – 163 дні.

Розглянемо задачу з використанням моделі виробничих поставок.

Приклад 57. компанія виробляє кінескопи для телевізорів. Інтенсивність рівномірного попиту на цю продукцію становить 2000 одиниць на рік. Організаційні витрати дорівнюють 20тис.грн. Ціна кінескопу складає 1000 грн., а витрати на зберігання – 100 грн. в розрахунку на одиницю продукції на рік. Запаси продукції на складі поповнюються зі швидкістю 4000 кінескопів на рік. Як тільки рівень запасів на складі наближається до нуля, виробнича лінія, починає виробництво продукції і продовжує цей процес поки не буде вироблено q кінескопів.

Необхідно знайти розмір партії, який мінімізує загальні витрати.

Визначити число поставок за рік, тривалість поставки впродовж року та тривалість циклу.

Розв'язання. Для розв'язання цієї задачі необхідно застосувати модель виробничих поставок.

За умовою g=2000; b=20; h=0,1; s=1, p=4000.

Число партій впродовж року $n=g/q=2000/q$.

Тривалість поставки $t=q/p=q/4000$.

Тривалість циклу $z=1/n=q/g=q/2000$.

Максимальний рівень запасів:

$$RT=(p-g)t=(4000-2000)\cdot\frac{q}{4000}=\frac{q}{2}$$

середній рівень запасів: $\frac{RT}{2}=\frac{q}{4}$.

Рівняння загальних витрат: $C=C_1+C_2+C_3=bh+sg+qh/4.$

Розв'язавши рівняння $\frac{dc}{dq}=0$, маємо

$$q_{опт}=\sqrt{2\cdot 4000\cdot 20\cdot 2000/2000\cdot 0,1}=1265.$$

Тоді оптимальне значення поставок: $n_{опт} = \frac{2000}{q} = \frac{2000}{1265} \approx 1{,}6$.

Тривалість поставки: $t_{опт} = \frac{1265}{4000} = 115$(днів).

Тривалість циклу: $Z_{опт} = \frac{365}{1{,}6} \approx 230$(днів).

<u>Інтерпретація.</u> За кожну поставку необхідно доставляти на склад 1265 кінескопів, оптимальне число поставок становить1,6; тривалість поставки – 115 днів, а тривалість циклу – 230 днів.

Завдання для самостійної роботи

1. Інтенсивність рівномірного попиту на холодильники становить 4 000 одиниць за рік. Організаційні витрати для однієї партії – 40 тис. грн, ціна 1 холодильника – 2 000 грн, витрати зберігання – 100 грн за одиницю товару на рік. Знайти оптимальний розмір поставки, число поставок, тривалість циклу.

2. Інтенсивність рівномірного попиту на товар – 1 000 одиниць на рік. Організаційні витрати на виконання замовлення – 20 грн, закупівельна ціна одиниці товару – 50 грн, витрати на зберігання одиниці товару складають 20 % від його закупівельної ціни. Знайти оптимальний розмір поставки, число поставок, тривалість циклу.

Питання для самоконтролю

1.Задача про розподіл інвестиційних ресурсів між об’єктами, її подання моделлю динамічного програмування.

2. Постановка задачі оптимізації поточних запасів за різних умов постачальника. Статичні детерміновані моделі оптимізації запасів без дефіциту та з дефіцитом.

3.Використання методу статистичного моделювання для визначення множини варіантів поставок.

Література: 11, С.371-391.

Тема 44. Задачі систем масового обслуговування (СМО)

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, який містить наступні питання: показниковий та пуассонівський розподіли, основні елементи СМО, розрахунок параметрів СМО з відмовленням.

План практичного заняття

1.Елементи СМО.

2. Розрахунок параметрів СМО.

Термінологічний словник ключових понять

Показниковий та Пуассонівський розподіли доцільно застосовувати для оцінки ефективності організації підприємницької діяльності, яку в багатьох випадках можна розглядати як СМО, зокрема, ці розподіли використовують для знаходження, наприклад, очікуваної кількості покупців за годину, або кількості механізмів, що вийшли з ладу за певний проміжок часу і очікують ремонту тощо. Всі ці ситуації є типовими для бізнес-діяльності і пов'язані із проблемою черг, з необхідністю її упорядкування з метою підвищення якості обслуговування споживачів. Не зупиняючись на теоретичних передумовах застосувань СМО, розглянемо типи СМО, найбільш поширені на практиці.

Характеристика елементів СМО.

Основними елементами СМО є: вхідний потік вимог, черга вимог, канали обслуговування, вихідний потік вимог. Схематично це зображено на рис.21.

Рис. 21

В залежності від характеру формування черг СМО розрізняють:

1) <u>системи з відмовленнями</u>, в яких, при зайнятості всіх каналів обслуговування, заявка не встає в чергу, а просто залишає систему;

2) <u>системи з необмеженою чергою</u>, в яких заявка встає в чергу, якщо в момент її появи всі канали були зайняті.

Розглянемо більш детально елементи СМО.

<u>Вхідний потік</u>: найбільш поширеним на практиці є найпростіший вхідний потік, що характеризується властивостями стаціонарності, ординарності та відсутності післядії.

В цьому випадку, ймовірність того, що число заявок, що надійшло в систему на обслуговування за проміжок часу t, дорівнює к, визначається за законом Пуассона

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}. \qquad (1)$$

де: λ - інтенсивність потоку заявок, тобто середнє число заявок в одиницю часу:

$$\lambda = \frac{1}{\bar{\tau}}. \qquad (2)$$

$\bar{\tau}$ - середнє значення інтервалу часу між двома надходженнями заявок і може бути розподілено за експоненційним законом із щільністю ймовірностей

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \qquad (3)$$

Вважають, що час очікування в черзі початку обслуговування – випадкова величина, яка розподілена експоненціально. Тому

$$f(t) = \nu e^{-\nu t}, \qquad (4)$$

де: ν - інтенсивність руху черги, тобто середнє число заявок, що надходять на обслуговування за одиницю часу:

$$\nu = \frac{1}{\bar{t}_{об}}, \qquad (5)$$

де: $\bar{t}_{об}$ - середнє значення часу очікування в черзі.

Вихідний потік вимог тісно пов'язаний із потоком обслуговування в каналі. При цьому тривалість обслуговування $\bar{t}_{обс}$ вважається випадковою величиною, що розподілена за показниковим законом із щільністю ймовірності

$$f(t_{обс}) = \mu \cdot e^{-\mu t}, \qquad (6)$$

де: μ - інтенсивність потоку обслуговування, тобто середнє число заявок, що обслуговується в одиницю часу:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{обс}}. \qquad (7)$$

$\bar{t}_{об}$ - середній час обслуговування.

Важливою характеристикою СМО, що об'єднують λ та μ, є інтенсивність навантаження або параметр навантаження

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}. \qquad (8)$$

слід відзначити, що одиниці вимірювання для параметрів λ та μ повинні бути однаковими. СМО, як об'єкт функціонування, може бути оцінена за наступними показниками. Розглядаємо n-канальні СМО.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання
Розрахунок параметрів СМО з відмовленням.

Для систем з відмовленнями:

1. Ймовірність простою каналів обслуговування, коли в системі не має заявок (κ=0):

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \rho^k \Big/ k!}. \qquad (9)$$

2. Ймовірність відмови в обслуговуванні, коли заявка, що надійшла на обслуговування знайде всі канали зайнятими (κ=n):

$$P_{від} = P_n = P_0 \cdot \frac{\rho_n}{n!}. \qquad (10)$$

3. Ймовірність обслуговування: $P_{обс} = 1 - P_{від}$. (11)

4. Середнє число каналів, зайнятих обслуговуванням: $\bar{n}_з = \rho \cdot P_{обс}$.(12)

5. Доля каналів, зайнятих обслуговуванням: $k_з = \bar{n}_з / n$. (13)

6. Абсолютна пропускна здатність СМО:

Розрахунок параметрів СМО з очікуванням.

Для систем з чергою:

1. Ймовірність простою каналів, коли в системі не має заявок (к=0):

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \rho^k \Big/ k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \qquad (15)$$

вважається, що $\rho/n < 1$.

2. Ймовірність, що в даний момент часу обслуговується к заявок:

$$P_k = \rho^k \cdot P_0 / k! \qquad 1 \le k \le n \qquad (16)$$

3. Ймовірність, що всі канали зайняті обслуговуванням:

$$P_n = \rho^n \cdot P_0 / n! \qquad (17)$$

4. Ймовірність, що заявка стане в чергу:

$$P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \cdot P_0 \qquad (18)$$

5. Середнє число заявок в черзі:

$$\bar{L}_{чер} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2} \cdot P_0 \qquad (19)$$

6. Середній час очікування заявки в черзі:

$$\bar{t}_{оч} = \bar{L}_{чер} / \lambda \qquad (20)$$

7. Середній час перебування заявки в СМО:

$$\bar{t}_{СМО} = \bar{t}_{оч} + \bar{t}_{обс} \qquad (21)$$

8. Середнє число каналів, зайнятих обслуговуванням:

$$\bar{n}_з = \rho \qquad (22)$$

9. Середнє число каналів, не зайнятих обслуговуванням:

$$\bar{n}_в = n - \bar{n}_з \qquad (23)$$

10. Коефіцієнт зайнятості каналів обслуговування:

$$k_з = \frac{\bar{n}_з}{n} \qquad (24)$$

11. Середнє число заявок в СМО:

$$Z = \bar{L}_{чер} + \bar{n}_з \qquad (25)$$

Приклади розв'язування задач СМО.

Розглянемо приклади розв'язання задач для n-канальної системи масового обслуговування.

Приклад 53. У відділі контролю якості, виробленої фірмою продукції, працюють три контролери. Якщо продукція надходить у відділ контролю, коли всі контролери зайняті експертизою, то продукція не перевіряється. В середньому за годину у відділ надходить 24 зразки продукції. Експертиза одного зразка потребує в середньому 5 хвилин. Визначити характеристики роботи відділу контролю якості як об'єкта СМО.

Розв'язання. За умовою задачі n=3 λ=24 1/год=0,4 1/хв $\bar{t}_{обс} = 5$ хв., тоді μ=0,2; $\rho=\lambda/\mu$=2.

1. Ймовірність простою каналів системи:

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \rho^k \Big/ k!} = \frac{1}{2^0/0!+2^1/1!+2^2/2!+2^3/3!} = 0{,}1587.$$

2. Ймовірність відмови в обслуговуванні:

$$P_{від} = P_n = 0{,}1587 \cdot 2^3/3! = 0{,}21.$$

3. Ймовірність обслуговування:

$$P_{обс} = 1 - 0{,}21 = 0{,}79.$$

4. Середнє число каналів, що зайняті обслуговуванням:

$$\bar{n}_{обс} = 2 \cdot 0{,}79 = 1{,}58.$$

5. Доля каналів, що зайняті обслуговуванням:

$$k_з = 1{,}58/3 = 0{,}526.$$

6. Абсолютна пропускна здатність системи:

$$A = 0{,}4 \cdot 0{,}79 = 0{,}316.$$

Інтерпретація. На основі проведених обчислень можна стверджувати, що при трьох контролерах (n=3) процент неперевіреної продукції в середньому становить 21%. При цьому в середньому контролери будуть зайняті експертизою на 53%.

Приклад 54. Ресторан швидкого обслуговування пропонує власникам автомобілів додаткові послуги у вигляді можливості одержати замовлення не виходячи із авто. При цьому одночасно може обслуговуватись три автомобілі. В середньому до ресторану прибувають 30 автомобілів на годину. На обслуговування одного замовлення необхідно в середньому 3 хв. розглядаючи додаткові послуги ресторану як об'єкт СМО, оцінити основні параметри його функціювання.

Розв'язання. За умовою n=3, λ=30 1/год=1/2 1/хв $\bar{t}_{обс} = 3$ хв; $\mu = \frac{1}{\bar{t}_{обс}} = \frac{1}{3}$ 1/хв; $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1/2}{1/3} = 1{,}5$.

1. Ймовірність простою каналів обслуговування:

$$P_0 = \frac{1}{1{,}5^0\big/0! + 1{,}5^1\big/1! + 1{,}5^2\big/2! + 1{,}5^3\big/3! + 1{,}5^4\big/3!(3-1{,}5)} = 0{,}21$$

2. Ймовірність, що 3 автомобілі одночасно прибули на обслуговування:

$$P_n = \frac{1{,}5^3}{3!} \cdot 0{,}21 = 0{,}12.$$

3. Ймовірність, що автомобіль опиниться в черзі:

$$P_{оч} = \frac{1{,}5^4}{3!(3-1{,}5)} \cdot 0{,}21 = 0{,}12\,.$$

4. Середнє число автомобілів у черзі до ресторану:

$$\bar{L}_{чер} = \frac{1{,}5^4}{(3-1)!(3-1{,}5)^2} \cdot 0{,}21 = 0{,}24\,.$$

5. Середній час очікування автомобіля у черзі

$$\bar{t}_{чер} = \frac{0{,}24}{0{,}5} = 0{,}48 \text{ хв.}$$

6. Середній час очікування автомобіля у СМО:

$$\bar{t}_{СМО} = 0{,}48 + 3 = 3{,}48 \text{ хв.}$$

7. Середнє число каналів, вільних від обслуговування:

$$\bar{n}_{в} = 3 - 1{,}5 = 1{,}5\,.$$

8. Коефіцієнт зайнятості каналів обслуговування:

$$k_{з} = \frac{1{,}5}{3} = 0{,}5\,.$$

9. Середнє число автомобілів у СМО

$$\bar{Z} = 0{,}24 + 1{,}5 = 1{,}74 \text{ машин.}$$

Інтерпретація. На основі проведених обчислень можна стверджувати, що ймовірність простою каналів обслуговування в середньому дорівнює 21%, а ймовірність автомобілю опинитись у черзі становить 12%, середня кількість автомобілів у черзі 0,24, тобто практично черги не має. Це підтверджується і величиною часу очікування обслуговування, що дорівнює 0,48 хв.

Завдання для самостійної роботи

1. Популярний універсам швидкого обслуговування спеціалізується на продажу харчових продуктів, розфасованих невеликими порціями. Керівництво універсаму занепокоєне, що в години «пік», тобто коли люди повертаються з роботи, утворюються черги до касових апаратів. Цей факт, на їх думку, несе загрозу іміджу «швидкого обслуговування», що їх приваблює більшість покупців в універсам. Проведені дослідження дозволили виявити, що в середньому в години «пік» α покупців за годину відвідують універсам.

Обслуговування одного покупця в середньому вимагає β секунд. Керівництво бажає оцінити можливий збиток від утворення черг до касових апаратів.

Вважаючи, що: а) n = 1; α = 89; β = 47; б) n = 2; α = 89; β = 47; в) n = 3; α = 89; β = 47 оцінити основні параметри організації роботи універсаму, як об'єкта СМО. Надайте керівництву необхідні рекомендації щодо покращення роботи універсаму.

2. Черговий по адміністрації міста має n телефонів. Телефонні дзвінки надходять в адміністрацію з інтенсивністю α заявок за годину. Тривалість телефонної розмови в середньому дорівнює β хв.

Вважаючи, що: а) $n = 3$; $\alpha = 90$; $\beta = 2$; б) $n = 4$; $\alpha = 110$; $\beta = 3$; в) $n = 5$; $\alpha = 120$; $\beta = 2$ оцінити основні показники організації роботи чергового від адміністрації як об'єкта СМО.

Питання для самоконтролю

1.Математична модель задачі масового обслуговування.

2.Характеристика елементів системи масового обслуговування: вимоги, вхідний потік вимог, черга вимог, канали обслуговування, вихідний потік вимог.

3.Розрахунок параметрів систем масового обслуговування: коефіцієнтів простою вимог у черзі та в системі, простою каналів обслуговування середнього часу очікування вимог у черзі.

Література: 11, С.333-369.

Тема 45. Задачі упорядкування та координації. Сітьове планування

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, який містить наступні питання: сітьова модель, робота, фіктивна робота, подія, критичний шлях, методика побудови сітьових графіків.

План практичного заняття

1. Сітьова модель
2. Методика побудови сітьових графіків.
3. Розрахунки основних параметрів сітьового графіка.

Термінологічний словник ключових понять

Широке застосування математичних моделей, обумовлене можливістю побудови програми робіт на основі сітьових графів, що дозволяє аналізувати ефективність реалізації складних проектів (наприклад, пов'язаних із будівництвом, виробництвом тощо).

Сучасне сітьове планування починається із розбивки програми робіт на незалежні операції та відповідні події. Кожна операція, тобто діяльність, вимагає певного проміжку часу і передбачає упорядкування за часом.

Сітьова модель – це графічне зображення плану виконання комплексу робіт, що складається із орієнтованих дуг (робіт), та вузлів (подій). І тому, після упорядкування вимог до виконання робіт (за часом) будь-який проект можна представити у вигляді орієнтованого графа без контурів.

Сітьова модель без контурів – це орієнтований граф, що не має циклів, тобто залишаючи певний вузол ми не можемо повернутись назад (подія уже здійснилась). В сітьовому моделюванні розрізняють два основних елементи – робота, як діяльність, та подія.

Робота – це активний процес, який вимагає затрат ресурсів або пасивний (очікування), та призводить до запланованих результатів.

Фіктивна робота – це взаємозалежність між результатами робіт (подіями), що не потребує затрат часу та ресурсами.

Подія – це результат виконання одної або декількох попередніх робіт.

Мінімум часу для завершення усього проекту – це найбільша величина сумарного часу, потрібного для проходження шляху від 0-початковго вузла (початкової події) до m- завершальної події.

Шлях – це будь-яка неперервна послідовність робіт та подій.

Критичний шлях – це шлях, що не має резервів й містить найбільш напружені роботи комплексу. І тому критичний шлях – це найдовший маршрут (за часом) від початкової до завершальної події.

Роботи, що знаходяться на критичному шляху вимагают якісного управління, тому що недодержання термінів їх виконання ставить під загрозу виконання (за часом) усього комплексу робіт.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

1 Методика побудови сітьових графіків.

При побудові сітьових моделей необхідно притримуватись наступних правил.

1. Якщо відома початкова подія, позначена 0-вузлом, то можна визначити числову послідовність подій усіх останніх вузлів моделі.

1. Модель зображується зліва направо і кожна напрямлена дуга виходить із i-ого вузла і входить до j-ого вузла ($j>i$). При цьому термін виконання роботи (i,j) позначають як t_{ij} і записують над стрілками.

2. Завершальна подія позначається найбільшим числом в заданій числовій послідовності вузлів.

3. Дві події i та j можуть пов'язуватись тільки однією роботою, що зображується напрямленою від i до j стрілкою (дугою). Для зображення паралельних робіт вводяться проміжна подія та фіктивна робота (див. рис.23).

5. В сітьовій моделі не повинно бути проміжних подій, з яких не виходить або не входить хоча б одна робота (див. рис.24,25).

Рис. 23

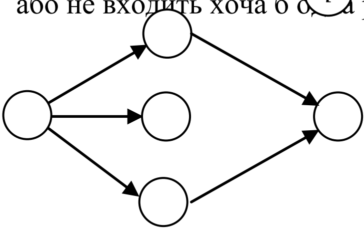


Рис. 24

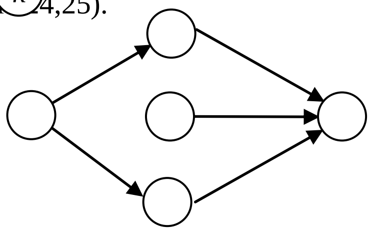
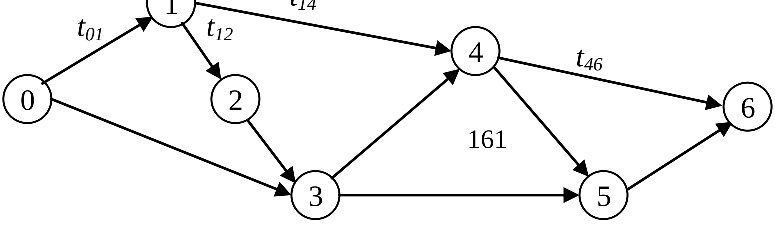


Рис. 25

Всі вищевикладені властивості урахowані при побудові сітьової моделі (див. Рис.26).



t_{34} t_{45}

t_{03} t_{23}

t_{35} t_{56}

Рис. 26

2. Розрахунки основних параметрів сітьового графіка

Основними параметрами сітьової моделі вважають знаходження критичного шляху (за часом) від початкової події (0-вузла) до результуючої (m-вузла).

Розрахунок критичного шляху включає два етапи і буде детально розглянуто при розв'язанні прикладу 1.

Приклад 58. В таблиці 1 представлена інформація про деякий комплекс робіт, що включає перелік певних подій та термінів виконання відповідних робіт.

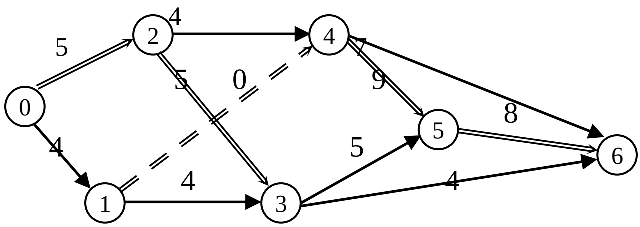
Таблиця 1

Робота (i,j)	(0,1)	(0,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(4,5)	(4,6)	(5,6)
Тривалість роботи (t_{ij})	4	5	4	5	4	0	5	4	9	7	8

Побудувати сітьову модель та знайти критичний шлях.

Розв'язання.

І.Відповідна сітьова модель має вигляд:



II. Визначимо кри

Нехай $t_i^{p.n.}$ - ранні

Якщо i=0, тоді $t_0^{p.n.}$ =

Нехай $t_j^{p.n.}$ - ранній термін початку всіх операцій, що входять в j.

Тоді $t_j^{p.n.} = \max\left(t_i^{p.n.} + t_{ij}\right)$ для всіх (i,j), де t_{ij} тривалість операції (i,j). Згідно умови маємо:

$$t_1^{p.n.} = t_0^{p.n.} + t_{0,1} = 0 + 4 = 4; \quad t_2^{p.n.} = t_0^{p.n.} + t_{0,2} = 0 + 5 = 5;$$

$$t_3^{p.n.} = \max_{i=1,2}\{4+4; 5+5\} = 10; \quad t_4^{p.n.} = \max_{i=2,3}\{5+4; 10+0\} = 10;$$

$$t_5^{p.n.} = \max_{i=3,4}\{10+5; 10+9\} = 19; \quad t_6^{p.n.} = \max_{i=3,4,5}\{10+4; 10+7; 19+8\} = 27.$$

отже, перший етап завершено.

Переходимо до другого. Він складається із наступних дій.

1. Нехай $t_i^{п.з.}$ - пізній термін завершення усіх операцій, що входять у вузол i.

Якщо i=1 та n - завершальна подія сітьової моделі, то $t_n^{п.з.} = t_i^{р.п.}$, що і є відправною точкою оберненого шляху;

Тоді $t_i^{п.з.} = \min\limits_j \left\{ t_j^{п.з.} - t_{ij} \right\}$ для всіх (i,j). Маємо $t_6^{п.з.} = t_6^{п.з.} = 27$; $t_5^{п.з.} = t_6^{п.з.} - t_{5,6} = 27 - 8 = 19$;

$t_4^{п.з.} = \min\limits_{j=5,6}\{27-7;19-9\} = 10$; $t_3^{п.з.} = \min\limits_{j=4,5,6}\{27-4;19-5;10-0\} = 10$;

$t_2^{п.з.} = \min\limits_{j=3,4}\{10-4;10-5\} = 5$; $t_1^{п.з.} = t_3^{п.з.} - t_{1,3} = 10-4 = 6$;

$t_0^{п.з.} = \min\limits_{j=1,2}\{5-5;6-4\} = 0$.

Другий етап обчислювальної процедури завершено и знаходимо роботи, що належать критичному шляху та його тривалість. Отже $t_{кр}$=27.

Крім того, операція (i,j) належить критичному шляху, якщо вона задовольняє умовам

$t_i^{р.п.} = t_i^{п.з.}$; $t_j^{р.п.} = t_j^{п.з.}$; $t_j^{р.п.} - t_i^{р.п.} = t_j^{п.з.} - t_i^{п.з.} = t_{ij}$

після виконання обчислень ми одержали роботи (0,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), що належать до критичного шляху..

Як правило, в сітьових моделях критичний шлях позначають подвійними стрілками. (Див. рис.5).

Операції сітьової моделі пов’язані ще двома параметрами.

Нехай $t_{ij}^{п.п.}$ - пізній срок початку робіт, що з’єднують вузли i та j. Тоді

$t_{ij}^{п.п.} = t_j^{п.з.} - t_{ij}$ для всіх (i,j).

Нехай $t_{ij}^{р.з.}$- ранній термін завершення робіт, що з’єднують вузли i та j.

$$t_{ij}^{р.з.} = t_i^{р.п.} + t_{ij} \text{ для усіх } (i,j).$$

Розрізняють два види резервів часу для усіх робіт, що пов’язують події i та j:

1) Повний резерв часу - ($r_{ij}^{\,n}$) ;

2) Вільний резерв часу - ($r_{ij}^{в}$), які можна обчислити за формулами:

$$r_{ij}^{n} = t_{ij}^{п.п.} - t_i^{р.п.} \text{ для усіх } (i,j) \qquad ()$$

$$r_{ij}^{в} = t_j^{р.п.} - t_i^{р.п.} - t_{ij} \text{ для всіх } (i,j) \qquad ()$$

Зауважимо, що для усіх робіт критичного шляху величини повного та вільного резервів дорівнюють нулю.

Використовуючи формули визначимо резерви часу для усіх робіт, що пов'язують події i та j прикладу 1. Одержані результати представимо в таблиці 2.

Таблиця 2

Робота (*i,j*)	**Тривалість роботи t_{ij}**	**Ранній термін**		**Пізній термін**		**Повний резерв**	**Вільний резерв**
		Початку $t_i^{р.п.}$	**Завершення** $t_{ij}^{р.з.}$	**Початку** $t_{ij}^{п.п.}$	**Завершення** $t_j^{п.з.}$	$r_{ij}^{п}$	$r_{ij}^{в}$
(0,1)	4	0	4	2	6	2	0
(0,2)	5	0	5	0	5	0	0
(1,3)	4	4	8	6	10	2	2
(2,3)	5	5	10	5	10	0	0
(2,4)	4	5	9	6	10	1	1
(3,4)	0	10	10	10	10	0	0
(3,5)	5	10	15	14	19	4	4
(3,6)	4	10	14	23	27	13	13
(4,5)	9	10	19	10	19	0	0
(4,6)	7	10	17	20	27	10	10
(5,6)	8	19	27	19	27	0	0

Помічаємо, що для робіт (0,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6) критичного шляху резерви часу дорівнюють нулю.

В той же час, роботи, що не належать до критичного шляху мають резерви часу відмінні від нуля.

Для характеристики міри напруження термінів виконання робіт, що мають резерви часу, використовують величину напруження робіт. Позначимо її $K_н\ (i,j)$.

Коефіцієнт напруження роботи – це відношення тривалості двох відрізків шляху, що не співпадають, одним із яких є шлях максимального терміну тривалості робіт, що проходять через дану роботу, а другим – критичний шлях.

Позначимо через $t'_{кр}(z)$ тривалість відрізку критичного шляху, що співпадає зі шляхом $z(i,j)_{\max}$ і містить роботу (i,j), маємо:

$$K_н\ (i,j)=\frac{t(z)_{\max}-t'_{кр}(z)}{t_{кр}-t'_{кр}(z)} \qquad \text{або } K_н\ (i,j)=1-\frac{r_{ij}^{п}}{t_{кр}-t'_{кр}(z)},$$

де $r_{ij}^{п}$ - повний резерв для робіт (i,j).

Величина коефіцієнта напруження дозволяє оцінити можливість ефективного розподілу резервів робіт, що не належать до критичного шляху. Якщо $K_н(i,j) \geq 0{,}8$, це означає, що робота знаходиться в критичній зоні.

Якщо $K_н\ (i,j) \in [0{,}6;0{,}8)$, тоді робота належить до підкритичної зони.

При $K_н\ (i,j) < 0{,}6$ робота знаходиться в резервній зоні.

3. Приклади аналізу та оптимізації сітьового графіка.

Приклад 59. Нехай наступна сітьова модель описує деяку програму будівельних робіт (див. рис.27)

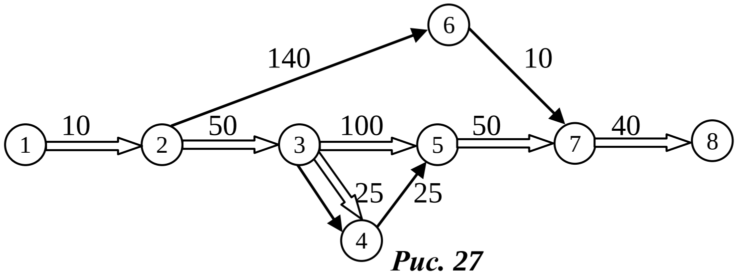


Рис. 27

Визначити критичний шлях, резерви часу та коефіцієнти напруження для усіх робіт (i,j), що не належить до критичного шляху. Інтерпретуйте одержані результати.

Розв'язання. Знаходимо всі можливі шляхи від першого до восьмого вузла.

$L_1 \to 1,2,6,7,8 \Rightarrow t(L_1)=10+140+10+40=200$

$L_2 \to 1,2,3,5,7,8 \Rightarrow t(L_2)=10+50+100+50+40=250$

$L_3 \to 1,2,3,4,5,7,8 \Rightarrow t(L_3)=10+50+25+25+50+40=200.$

Критичний шлях – це найдовший маршрут (за часом) між першим та восьмим вузлами. Тому $t_{кр}=250$.

Ми визначимо, що роботи - (1,2), (2,3), (5,7), (7,8) лежать на критичному шляху, тоді як роботи (2,6), (6,7) та (3,4), (4,5) не лежать на ньому.

Визначимо коефіцієнти напруження робіт:

1) для (2,6) та (6,7)
2) для (3,4) та (4,5).

Використовуючи формулу $K_н\ (i,j)=\dfrac{t(z)_{\max}-t'_{кр}(z)}{t_{кр}-t'_{кр}(z)}$.

Маємо

а) $K_н(2,6)=K_н(6,7)=\dfrac{200-50}{250-50}=0{,}75$.

б) $K_н(3,4)=K_н(4,5)=\dfrac{200-150}{250-150}=0{,}5$.

Ви можете визначити значення коефіцієнтів напруження за іншою формулою, попередньо обчисливши повні резерви часу для відповідних робіт.

Інтерпретація. Роботи (1,2), (2,3), (3,5), (5,7) та (7,8) на критичному шляху і його величина $t_{кр}=250$. коефіцієнт напруження для робіт (2,6) та (6,7) дорівнює 0,75. Тому ці роботи знаходяться в підкритичній зоні. Роботи (3,4) та (4,5) - в резервній зоні, тому що коефіцієнт напруження 0,5.

Це означає, що не дивлячись на рівність повних резервів часу для робіт (2,6), (6,7) та для (3,4) і (4,5) (ви можете перевірити цей факт), терміни виконання робіт на шляху L_1 більш жорсткі ніж на шляху L_2.

Завдання для самостійної роботи

1. Нехай задано сітьову модель, що описує деякий будівельний проект пронумерувати вузли та визначити критичний шлях;

б) визначити резерви часу для усіх робіт моделі;

в) знайти коефіцієнти напруження для некритичних робіт моделі;

г) дати інтерпретацію одержаних результатів.

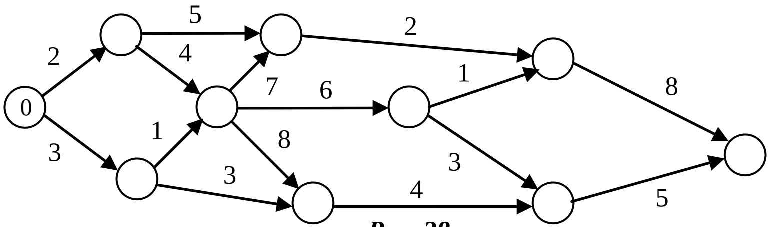


Рис. 28

2. У таблиці, поданій нижче, представлена інформація про деякий комплекс робіт, що включає перелік певних подій та термінів виконання відповідних робіт.

Робота (i,j)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,5)	(2,6)	(3,6)	(4,7)	(5,7)	(6,7)
Тривалість роботи (t_{ij})	10	6	4	6	8	4	12	6	10

Побудувати сітьову модель.

Визначити: а) критичний шлях;

б) резерви часу для усіх робіт моделі;

в) коефіцієнти напруження для усіх некритичних робіт;

г) дати інтерпретацію одержаних результатів.

Питання для самоконтролю

1.Поняття моделі сітьового планування та управління.

2. Сітьова модель та її основні елементи.

3. Порядок та правила побудови сітьових графіків.

Література: 11, С. 286-330.

Тема 46-47-48. Задачі та моделі заміни. Задачі з умовами невизначеності та конфлікту. Багатокритеріальні задачі в менеджменті.

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, який містить наступні питання: математична постановка задач теорії ігор, характеристика задач теорії ігор.

План практичного заняття

1.Теорія ігор: математичні моделі

2.Ідентифікація математичних моделей теорії ігор до моделей лінійного програмування.

3 Знаходження очікуваної ціни гри.

Термінологічний словник ключових понять

1.Теорія ігор: математичні моделі

Основна мета використання теорії ігор полягає в дослідженні наступної проблеми: для n гравців позначених $P_1, P_2, \ldots, P_n$, що опинились в конфліктній ситуації, необхідно визначити оптимальну стратегію поведінки для всіх її учасників.

Тому, застосовуючи термін "гра", ми визначаємо множину правил, яким повинні слідувати всі гравці. Бути учасником гри - це означає можливість для кожного гравця реалізовувати індивідуальні варіанти своєї поведінки, що називають індивідуальною стратегією гравця.

Як результат гри кожен із учасників гри може виграти (або програти) певну суму. Якщо сума виграшу одного гравця дорівнює програшу іншого, то така гра є грою двох гравців з нульовою сумою.

2 Характеристика задач теорії ігор

Ігри можна класифікувати за числом гравців та можливих стратегій. Шахи – це гра двох осіб з скінченою кількістю стратегій (ходів), якщо ми включаємо правило, що припиняє гру. Покер – це гра багатьох осіб, хоча також має скінчену кількість ходів. Ігри можуть бути кооперативними або індивідуальними. Зрозуміло, що ігри двох осіб індивідуальні. Розглянемо скінченні ігри з нульовою сумою, які легко можуть бути зведені до задач лінійного програмування.

Нехай задано платіжну матрицю гри $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Припускаємо, що платіжна матриця не має сідлової точки.

Визначаємо змішані стратегії кожного із гравців.

Нехай оптимальне рішення заданої гри для першого гравця має вигляд:

$X_0 = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, де x_i – ймовірність вибору своєї і-ої стратегії першим гравцем ($i = \overline{1, m}$);

для другого гравця:

$Y_0 = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, де y_j – ймовірність вибору своєї j-тої стратегії другим гравцем ($j = \overline{1, n}$). Нехай ν буде ціною гри.

3 Ідентифікація математичних моделей теорії ігор до моделей лінійного програмування

Побудуємо математичну модель поведінки в даній грі для першого гравця.

Перший гравець намагається максимізувати ціну гри ν при заданих умовах та сумі відповідних ймовірностей $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$. При цьому $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ проти будь-якої чистої стратегії другого гравця має бути не менше ніж ν.

Отже, математична модель поведінки першого гравця може бути представлена як задача лінійного програмування, а саме:

Знайти максимум ν

При умові
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq \nu \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq \nu \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq \nu \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1 \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_i \geq 0; \ i = \overline{1, m}$$

Перетворимо одержану модель наступним чином:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot \dfrac{x_1}{\nu} + a_{21} \cdot \dfrac{x_2}{\nu} + \ldots + a_{m1} \cdot \dfrac{x_m}{\nu} \geq 1 \\ a_{12} \cdot \dfrac{x_1}{\nu} + a_{22} \cdot \dfrac{x_2}{\nu} + \ldots + a_{m2} \cdot \dfrac{x_m}{\nu} \geq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} \cdot \dfrac{x_1}{\nu} + a_{2n} \cdot \dfrac{x_2}{\nu} + \ldots + a_{mn} \cdot \dfrac{x_n}{\nu} \geq 1 \end{cases} \qquad (3)$$

Позначимо $\dfrac{x_i}{\nu} = t_i, \ t_i \geq 0, \ i = \overline{1,m}$ (4)

або $x_i = t_i \cdot \nu, \ i = \overline{1,m}$ (5)

Тоді $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \Rightarrow t_1\nu + t_2\nu + \ldots + t_m\nu = 1 \Rightarrow \nu(t_1 + t_2 + \ldots + t_m) = 1 \Rightarrow$

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_m = \frac{1}{\nu} \text{ або } \sum_{i=1}^{m} t_i = \frac{1}{\nu} \qquad (6)$$

Нехай $\sum_{i=1}^{m} t_i = \dfrac{1}{\nu} = Z$ or $Z = \sum_{i=1}^{m} t_i = \dfrac{1}{\nu}; \ i = \overline{1,m}$.

Тому що $\nu \to \max, \ Z \to \min$.

Отже, вихідна задача може бути записана в наступному вигляді:

Мінімізувати $Z = t_1 + t_2 + \ldots + t_m$

При умові
$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m \geq 1 \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{m2}t_m \geq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \geq 1 \end{cases} \qquad (7)$$

$$t_i \geq 0, \ \ i = \overline{1,m}$$

Застосувавши симплекс-метод, визначимо оптимальне значення для t_i, $i=\overline{1,m}$ та оптимальне значення цільової функції Z або $\frac{1}{\nu}$.

Нарешті, знаходимо оптимальну змішану стратегію для першого гравця.

Аналогічну задачу лінійного програмування можна побудувати для другого гравця.

Знайти мінімальне значення ν

При умові $\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \le \nu \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \le \nu \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \le \nu \\ y_1 + y_2 + ... + y_n = 1 \end{cases}$ (8)

$y_j \ge 0;\ j=\overline{1,n}$

Нехай $u_j = \frac{y_j}{\nu};\ u_j \ge 0;\ j=\overline{1,n}$ (9)

або $y_j = u_j \cdot \nu,\ j=\overline{1,n}$ (10)

Тоді $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \Rightarrow u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{1}{\nu}$ або $\sum_{j=1}^{n} U_i = \frac{1}{\nu}$ (11)

Позначимо $W = \frac{1}{\vartheta}$ (12)

Тому що $\vartheta \to \min, W \to \max$

Отже, вихідну задачу можна записати як

Максимізувати $W = u_1 + u_2 + ... + u_n$

При умові $\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + ... + a_{1n}u_n \le 1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{2n}u_n \le 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + ... + a_{mn}u_n \le 1 \end{cases}$ (13)

$u_j \ge 0;\ j=\overline{1,n}$

Помічаємо, що математична модель (13) – це задача, подвійна до задачі (7) і може бути розв’язана методами лінійного програмування.

4 Знаходження очікуваної ціни гри

З метою порівняння переваг різних змішаних стратегій гравців певної гри, розглянемо поняття очікуваної ціни гри.

Очікувана ціна гри – це середня величина платежу першого гравця, коли обидва гравці реалізують свої змішані стратегії.

Пояснимо це поняття, використовуючи матричну гру 2 х 2, в якій платіжна матриця записана у загальному вигляді: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ (1)

Нехай 1 гравець R реалізовує свою змішану стратегію наступним чином, а саме: $P = [p_1 \quad p_2]$ (2)

тобто, 1 гравець вибирає свою першу стратегію з ймовірністю p_1, а другу – з ймовірністю p_2.

Відповідно, 2 гравець C реалізовує свою змішану стратегію наступним чином, а саме: $Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ (3)

тобто, 2 гравець вибирає свою першу стратегію з ймовірністю q_1, а другу – з ймовірністю q_2.

Тоді, **очікуване значення платежу** E даної гри дорівнює сумі добутків елементів платіжної матриці на відповідні ймовірності. Отже, $E = p_1q_1a_{11} + p_1q_2a_{12} + p_2q_1a_{21} + p_2q_2a_{22}$ (4)

У термінах матриць P, A та Q, одержуємо відносно просте матричне рівняння:

$$E = PAQ \tag{5}$$

Нехай $[p_1, p_2, ..., p_m]$ (6)

та

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \tag{7}$$

вектори, що відповідають змішаним стратегіям гравців R та C, для гри зі змішаною платіжною матрицею порядку (m x n).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Тоді, очікуване значення гри має вигляд:

$$E = PAQ = [p_1 p_2 ... p_m] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \tag{9}$$

Розглянемо приклади на обчислення очікуваного значення гри.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Приклад 60. Розглянемо гру двох гравців R та C з платіжною матрицею A, де $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Обчислити очікуване значення гри, якщо гравці R та C реалізують свої змішані стратегії:

a. $p = [0{,}5 \quad 0{,}5]$ та $Q = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$

b. $p = [0{,}8 \quad 0{,}2]$ та $Q = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}9 \end{bmatrix}$

Розв'язання. *a*. Обчислимо

$$E = PAQ = [0{,}5 \quad 0{,}5] \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$= [0{,}5 \quad 0{,}5] \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} = 0.$$

Отже, при грі протягом достатньо довгого періоду, вона закінчується з "нічийним" результатом.

b. Обчислимо

$$E = PAQ = [0{,}8 \quad 0{,}2] \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}9 \end{bmatrix}$$

$$= [2 \quad -1{,}4] \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}9 \end{bmatrix} = -1{,}06.$$

Отже, гравець R у процесі довготривалої гри може очікувати в середньому на програш у сумі 1,06(грн.) за кожну гру.

Приклад 61. Як частину своєї інвестиційної діяльності компанія виділила 40000(грн.) для короткострокових інвестицій на фондовому та валютному ринках.

Вкладення інвестицій захищено нормою прибутку (це той процент, який пропонує банк своїм вкладникам). Зростання норми прибутку у загальному вигляді може привести до зростання інвестиційних вкладень на валютному ринку та відповідного спадання на фондовому. Нехай платіжна матриця представляє можливі варіанти очікуваного зростання або спадання величини кожного інвестиційного вкладення при встановленій нормі прибутку (у відсотках):

	Норма прибутку	
Інвестиції	Зростання	Падіння
Валютний ринок	15	10
Фондовий ринок	−5	25

а) Визначити оптимальні стратегії компанії в інвестуванні 40000(грн.)

б) Який прибуток від інвестування може очікувати компанія?

Розв'язання. а) Розглянемо дану ситуацію як матричну гру, в якій компанію будемо вважати першим гравцем. Позначаючи оптимальні стратегії компанії як $p = [p_1 \quad p_2]$ знаходимо:

$$p_1 = \frac{d-c}{a+d-b-c} = \frac{25-(-5)}{15+25-10-(-5)} = \frac{30}{35} \approx 0{,}86$$

та $\quad p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0.86 = 0.14$

Отже, компанія може вкласти (0,86)(40000) або 34400(грн.) у фондовий ринок.

б). Очікувана ціна гри дорівнює

$$E = \frac{ad - bc}{a + d - b - c} = \frac{(15)(25) - (10)(-5)}{15 + 25 - 10 - (-5)} = \frac{425}{35} \approx 12{,}14\,.$$

Таким чином, компанія може очікувати на прибуток у 12,14% на загальну величину інвестицій у 40000(грн.), тобто прибуток має дорівнювати (0,1214)(40000) = 4856(грн.).

Завдання для самостійної роботи

1. Задано платіжну матрицю гри

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Обчислити очікуваний виграш для наступних пар стратегій та знайти оптимальні для гравця R.

а) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ б) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

в) $P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ г) $P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix}$

2. Задано платіжну матрицю гри $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Обчислити очікуваний виграш для наступних пар стратегій та знайти оптимальні для гравця R.

Питання для самоконтролю

1.Сутність та класифікація задач заміни.

2.Характеристика задач стохастичного програмування.

3.Характеристика, приклади багатокритеріальних оптимізаційних задач.

Література: 11, С. 200-270.

Перелік питань для підготовки до поточного модульного контролю 1

1. Лінійна та векторна алгебра.
2. Аналітична геометрія.
3. Що називається розв`язком системи лінійних рівнянь?
4. Як дослідити на сумісність систему лінійних рівнянь?
5. Як обчислити скалярний, векторний і мішаний добуток векторів?
6. Розкладення векторів за базисом.

7. Записати рівняння прямої на площині.
8. Записати рівняння прямої і площини в просторі.
9. Коло і еліпс.
10. Гіпербола і парабола.
11.Обчислення границь функції неперервного аргументу.
12. Дати означення похідної функції y = f(x) в точці x_0.
13. Який механічний зміст похідної?
14. Дати означення максимуму і мінімуму в точці.
15. Сформулюйте теорему про необхідну умову екстремуму.
16. Сформулюйте теорему про достатні умови екстремуму.
17. Як знайти найбільше та найменше значення функції, диференційованої на заданому проміжку?
18. Сформулюйте основні методи інтегрування.
19. Сформулюйте формулу Ньютона-Лейбніца.
20. Застосування визначеного інтегралу в геометрії.
21. Означення числового ряду. Сформулюйте необхідну і достатні умови збіжності ряду.
22. Як знайти область збіжності степеневого ряду?

Перелік питань для підготовки до поточного модульного контролю 2

1. Класичне означення ймовірності.

2.Основні поняття комбінаторного аналізу: основне правило комбінаторики, перестановки, розміщення, сполучення. Геометричне означення ймовірності.

3. Умовна ймовірність та поняття про незалежність подій. 4.Формули повної ймовірності та Байєса.

5. Модель повторних випробувань схеми Бернуллі.

6.Теореми Муавра-Лапласа та Пуассона як дослідження асимптотичної поведінки біноміального розподілу.

7. Дискретні випадкові величини, їх закони розподілу та числові характеристики

8. Неперервні та абсолютно неперервні випадкові величини. Функція та щільність розподілу ймовірності. Числові характеристики

9. Рівномірний, показників (експоненціальний) та нормальний закони розподілів імовірностей.

10. Основані поняття математичної статистики: вибіркові спостереження та вибіркові оцінки

11. Емпірична функція розподілу та гістограма. Вибіркові моменти.

12.Статистичні оцінки та їх властивості. Методи перевірки статистичних гіпотез.

Перелік питань для підготовки до поточного модульного контролю 3

1.Загальна постановка оптимізаційної задачі, її структура: цільова функція, обмеження як спосіб опису множини допустимих планів.

2. Алгоритм графічного методу.

3.Теоретичні основи симплекс-методу розв'язування задачі лінійного програмування:

4. Алгоритм симплекс-методу

5. Теорія двоїстості

6. Методика розв'язування транспортної задачі

7. Цілочислове програмування

Перелік питань для підготовки до поточного модульного контролю 4

1. Оптимізаційні задачі управління запасами

2. Задачі масового обслуговування

3. Сукупність задач масового обслуговування

4. Сітьове планування

5. Задачі з умовами невизначеності та конфлікту

Зразок модульної контрольної роботи 1

1. Дано матриці $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -7 & 8\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$, знайти *2A–3B*.

2. Обчислити визначник $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & -3\\ 4 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}$.

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь: $\begin{cases}2x_1+3x_2=8\\ x_1-4x_2=-7\end{cases}$.

4. Знайти скалярний добуток векторів (або векторний добуток векторів) $\overrightarrow{a}=(2;1;3)$ і $\vec{в}=\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$.

5. Записати рівняння прямої, що проходить через точку *A(2;1)*, паралельно (перпендикулярно) прямій *y=3x–5*.

6. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, де *A(2; 1; 3), B(0; 4; –2), C(3; 5;1).*

7. Привести до канонічного виду та побудувати криву $x^2+y^2-6x+10y+9=0$

8. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-4x-6}{x-3}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{7x}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$

9. Знайти інтервали опуклості і вгнутості графіка функції: $y=3x^5-5x^4+4$

10. Знайти похідні функцій

а) $y = 3x^3 + 5x^2 + \frac{2}{x^2} + 4$ б) $y = \frac{3x^2 + 4}{6x - 1}$ в) $y = ln^5(3x+1)$

11. Знайти екстремум функцій: $y = x^4 - \frac{x^2}{2} + 8$

12. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^1 \left(\frac{5}{x^2} + x^3 - \frac{1}{x} \right) dx$ б) $\int x^3 \cdot ln\, x\, dx$

13. Знайти площу фігури, обмеженої лініями: $y = x^2 - 6x + 8,\ \ y = -x + 2$.

14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 2y' + 5y = 0$

Зразок модульної контрольної роботи 2

1. (2 бали) В урні 7 білих і 4 чорні кулі. Навмання взяли 3 кулі. Яка ймовірність, що серед них 2 білі кулі?
2. (3 бали) З урни, в якій 2 білі і 3 чорні кулі, навмання переклали одну кулю до іншої урни, в якій 4 білі і 3 чорні кулі. Потім з другої урни навмання взяли одну кулю. Яка ймовірність, що ця куля біла?
3. (2 бали) Зараженого зерна 20%. Навмання взяли 5 зерен. Яка ймовірність, що серед них принаймні одне заражене зерно?

4. (1 бал) Випадкова величина X має розподіл ймовірностей

X	-2	0	1	3
P	0,3	0,1	0,2	0,4

Знайти: $M(X), D(X), \sigma(X)$, $P(X \le 0)$.

5. (2 бали) Випадкова величина Y має розподіл ймовірностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ (x^2 - 1)/3, & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Знайти: p(x), $M(X), D(X), \sigma(X)$; $P(-2 < X \le 1)$.

6. (1 бал) Знайти числові характеристики випадкової величини $Z = 2X - 3Y$, де X із задачі 4, а Y із задачі 5.

7. (2 бали) Розмір деталі має нормальний розподіл з параметрами $\mu = 10, \sigma = 0,2$. Деталь вважається стандартною, якщо її розмір лежить у межах від 9,7 до 10,1 (або відхилення розміру від номіналу не перевищує 0,3). Знайти відсоток стандартних деталей серед усіх виготовлених.

8. (3 бали) Знайти незсунені точкові оцінки для середнього значення та дисперсії генеральної сукупності за статистичним розподілом

93	94	97	100	102
2	7	11	15	5

9. (4 бали) МНК знайти рівняння лінії регресії та коефіцієнт лінійної кореляції

x	2	3	5	8	9
y	1	3	5	7	8

Зразок модульної контрольної роботи № 3

1) (4 бали) Побудувати математичну модель наступної задачі.

Фабрика випускає три види тканин A_1, A_2, A_3, причому за добу потрібно випускати тканини A_1 не менше 90 м, а двох інших тканин разом не більше 150 м. Добові ресурси такі: 780 од. обладнання, 850 од. сировини і 780 од. електроенергії, витрати яких на 1 м тканини наведені в таблиці

	Тканини		
Ресурси	A_1	A_2	A_3
Обладнання	2	3	4
Сировина	1	4	5
Електроенергія	3	4	2
Ціни (грн.)	80	70	60

Визначити добовий план випуску тканин, який принесе максимальний дохід.

2) (4 бали) Розв'язати ЗЛП графічним методом. $F = x_1 + x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 3x_2 \ge 9 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

3) (6 бали) Дано проміжну симплекс-таблицю для ЗЛП на максимум (або на мінімум)

		cj	7	5	0	0
Базис	$C_б$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
		2	1	1	0	1
		1	1	0	1	-1
Δj						

a) Заповнити пропуски у симплекс-таблиці.

b) Записати поточний базисний розв'язок та перевірити його оптимальність

c) Визначити, який вектор потрібно включити до базису, а який вектор треба виключити

d) Обчислити наступну симплекс-таблицю

4) (8 бали) Дано ЗЛП та її розв'язок $F_{min}(0; 3) = 3$: $F = x_1 + x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 3x_2 \ge 9 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Скласти двоїсту задачу та знайти її розв'язок за теоремами двоїстості.

ЗРАЗКИ ЕКЗАМЕНАЦІЙНИХ БІЛЕТІВ

ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД УКООПСПІЛКИ

ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ

Освітньо-кваліфікаційного рівня "бакалавр"
Напрям підготовки: 6.140103 «Туризм»
Спеціальності:
Семестр __I___
Навчальна дисципліна "Вища та прикладна математика"

Екзаменаційний білет

1. Знайти AB, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

2. Знайти довжину вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо A(1;0;1) і B(0;-1;-2).
3. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a}=\{2;0;-1\}$; $\vec{b}=\{1;3;0\}$; $\vec{c}=\{1;4;-1\}$
4. Знайти похідну функції $y = x\ln x$
5. Знайти: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+7}\right)^{2x-3}$
6. Знайти $\int \dfrac{2}{x^2-4}dx$
7. Серед 100 лотерейних білетів 8 виграшних. Знайти імовірність того, що з 10 вибраних білетів 3 виявиться виграшними.
8. У кожному з двох ящиків міститься 8 білих і 5 чорних кульки. З першого ящика переклали у другий 2 кульки. Знайти ймовірність того, що кулька, яку дістали з II-го ящика, виявиться чорною.
9. Монету кидають 7 раз. Знайти імовірність того, що "герб" випаде менше двох раз.
9. Випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{25}, & 0<x\le 5 \\ 1, & x>5 \end{cases}$$

Знайти M(x), Д(x)
10. Знайти вибіркову дисперсію за даним розподілом вибірки

x_i	7	3	9
n_i	16	13	11

11. Застосовуючи МНК, знайти рівняння ліній регресії $y = px + b$ за статистичними даними

x	4	7	5	8	3
p	2	5	3	4	6

Зав. кафедрою Провідний викладач

ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД УКООПСПІЛКИ
ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ

Освітньо-кваліфікаційного рівня “бакалавр”
Напрям підготовки: 6.140103 «Туризм»
Спеціальності:
Семестр __II___
Навчальна дисципліна “Вища та прикладна математика”

Екзаменаційний білет

1. Розв'язати задачу лінійного програмування за допомогою графічного методу.

$$F = 3x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 3 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

2. Знайти оптимальний план задачі за допомогою симплексного методу.

$$F = -x_4 - x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$$

3. Скласти математичну модель двоїстої задачі для задачі №2 і знайти її оптимальний план, використовуючи розв’язок прямої задачі.

4. Знайти оптимальний план задачі, використовуючи двоїстий симплексний метод.

$$F = -2x_1 - 8x_2 - x_3 - 5x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \ge 18 \\ x_2 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \ge 24 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 30 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,4}.$$

5. Знайти оптимальний план транспортної задачі.

Пункти зберігання	**Пункти призначення**				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	3	4	160
A_2	3	2	5	5	140
A_3	1	6	3	2	60
Потреби	80	80	60	80	

6. Дано платіжну матрицю антагоністичної гри.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Скласти ЗЛП для визначення оптимальних змішаних стратегій гравців.
2) Скласти першу симплекс-таблицю для задачі лінійного програмування на максимум.
3) Визначити оптимальні змішані стратегії гравців.

Зав. кафедрою Провідний викладач

Індивідуальні завдання для самостійної роботи студентів та методичні рекомендації до їх виконання

Для розвитку творчих здібностей та поглиблення і закріплення своїх знань студент може за власним бажанням виконати та захистити індивідуальне завдання за темами, які наведені у таблиці. При умові якісного його виконання, без порушення термінів та ***успішному захисті*** нараховуються додаткові бали.

Індивідуальне завдання 1

№ п/п	Тема	Зміст роботи	Література
1	Визначники. Елементи теорії матриць. Загальна теорія систем лінійних рівнянь	Обчислення визначника 4-го порядку. Обчислення добутку матриць. Розв'язування систем лінійних рівнянь трьома методами	[8] ІДЗ 1.1-1.2 с.32-37 ІДЗ 1.2 с.41-43
2	n-вимірний векторний простір. Елементи векторної алгебри	Обчислення скалярного векторного, змішаного добутку векторів, перевірка колінеарності, ортогональності компланарності векторів. Обчислення площі трикутника	[8] ІДЗ 2.2 с.75-80
3	Лінії на площині. Елементи аналітичної геометрії в просторі	Знаходження рівнянь сторони висоти, медіани трикутника, точки перетину ліній, відстань від точки до прямої	[8] ІДЗ 3.2 с.106-107
4	Границі функцій. Неперервність функцій	Знаходження границь функцій. Використання I і II визначних границь	[8] ІДЗ 5.1 с.158-165
5	Похідна функції. Диференціал функції однієї змінної	Знаходження похідних складних функцій	[8] ІДЗ 6.1 (1-5,7-8) с.205-215
6	Використання похідної	Повне дослідження функцій. Побудова графіка функцій	[8] ІДЗ 6.4 (2-3) с. 241-242

Індивідуальне завдання 2

№ п/п	Тема	Зміст роботи	Література
1	Математичне програмування	Розв'язування економічних задач за допомогою графічного, симплексного методу	[10] с.
2	Дослідження операцій	Розв'язування задач систем масового обслуговування	[16] с.

ПОРЯДОК І КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ

Мета: об'єктивно оцінити роботу студента протягом навчального семестру, яка включає в себе відвідування лекцій та практичних занять, активність роботи студента протягом семестру, результати виконання модульних контрольних робіт, підготовка та захист індивідуальних завдань тощо. А також участь студентів у наукових студентських конференціях, олімпіадах, підготовці презентацій тем, які винесені на самостійну роботу.

Система нарахування балів за видами навчальної діяльності

Семестр І

Форма навчальної діяльності	**Вид навчальної діяльності**	**Бали**
1. Аудиторна		
1.1. Лекція	1. відвідування	2,5 (0,25 б × 10)
1.2. Практичне заняття	2. відвідування 3. розв'язування навчальних задач біля дошки 4. Поточні контрольні і самостійні роботи	4,25 (0,3 б × 17) 4 (1б × 4) 21 (3б × 7)
1.3. Самостійна індивідуально-консультативна робота	1. Виконання домашніх завдань, які передбачені робочою навчальною програмою з дисципліни; 2. Підготовка до модульної контрольної роботи й інших форм поточного контролю 3. Виконання індивідуального завдання	4 (1б × 4) 20 (10б × 2) 2,25б
1.4. Поточний контроль	Всі види робіт	60
1.5. Підсумковий контроль	іспит	40

Семестр ІІ

Форма навчальної діяльності	**Вид навчальної діяльності**	**Бали**
1. Аудиторна		
1.1. Лекція	1. відвідування	4,5 (0,25 б × 18)
1.2. Практичне заняття	2. відвідування 3. розв'язування навчальних	3,5 (0,25 б × 15) 4 (1б × 4)

	задач біля дошки 4. Поточні контрольні і самостійні роботи	21 (3б × 7)
1.3. Самостійна індивідуально-консультативна робота	1. Виконання домашніх завдань, які передбачені робочою навчальною програмою з дисципліни; 2. Підготовка до модульної контрольної роботи й інших форм поточного контролю 3. Виконання індивідуального завдання	4 (1б × 4) 20 (10б × 2) 3б
1.4. Поточний контроль	Всі види робіт	60
1.5. Підсумковий контроль	іспит	40

Система нарахування додаткових балів за видами робіт з вивчення дисципліни «Вища математика»

Форма роботи	Вид роботи	Бали
1. Навчальна	1.Участь в університетських предметних олімпіадах	10
	2.Участь в міжвузівських, всеукраїнських, міжнародних предметних олімпіадах	20
	3.Виконання індивідуальних навчально-дослідних завдань підвищеної складності	10
	4.Виконання та захист міждисциплінарних проектів	20
2. Науково-дослідна	1.Участь у наукових студентських університетських конференціях	15
	2.Участь у наукових студентських міжвузівських, всеукраїнських, міжнародних конференціях	20

Критерії підсумкового контролю результатів навчання студента шляхом складання іспиту з дисципліни «Вища математика»

Оцінка за шкалою ECTS	Оцінка за бальною шкалою, що використовується в ПУЕТ	Оцінка за 4-бальною шкалою
A	90-100 балів	Відмінно
B	82-89 балів	Добре
C	74-81 балів	Добре
D	64-73 балів	Задовільно
E	60-63 балів	Задовільно
FX	35-59 балів	Незадовільно з можливістю повторного складання
F	0-34 балів	Незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Барковський В. В. Математика для економістів : Вища математика навч. посіб. / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – К. : Центр навчальної літератури, - 2005. – 400 с.

2. Барковський В. В. Математика для економістів : Теорія ймовірностей та математична статистика, навч. посіб. / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – К. : Центр навчальної літератури, - 2005. – 448 с.

3. Власов В. Г. Конспект лекций по высшей математике / В. Г. Власов. – М. : Айрис, 1996. – 288 с.

4. Высшая математика для экономистов : учеб. пособие / Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман ; под ред. Н. Ш. Кремера. – 3-е изд. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 479 с.

5. Клепко В. Ю. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посіб. / В. Ю. Клепко, В. Л. Голець. – К. : ЦУЛ, 2006. – 600 с.

6. Пак В. В. Высшая математика / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – Д. : Сталкер, 1997. – 560 с.

7. Рябушко А. П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : в 3 ч. / А. П. Рябушко. – Минск : Вышейшая школа, 1991. – Ч. 1 – 351 с.

8. Рябушко А.П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. - Минск: ”Вышейшая школа”, 1991 – ч. 2. – 352.

9. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. пособие для вузов. Изд. 7-е, стер. – М.: Высш. шк., 1999. – 479 с.

10. Зюков М.Є., Нічуговська Л.І. Математичне програмування: Навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни за кредитно-модульною системою організації навчального процесу для студентів спеціальностей 6.050201 «Менеджмент організацій», 6.050206 «Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності». 2006 [Електрон. ресурс] – Спосіб доступу: Електрон. чит. зал ПУЕТ

11. Исследование операций в экономике: Уч. пособие / Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 1999. – 402 с.

12. Кутковецький В.Я. Дослідження операцій: Навч. посібник. – 2-ге вид. – К.: Професіонал, 2005. – 264 с.

13. Лопатін О.К. Теорія ймовірностей та математична статистика. Практикум для самостійної роботи студентів. – К.: Національна академія управління, 2001. – 156 с.

14. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2005. – 452 с.

15. Нічуговська Л.І. Дослідження операцій: Курс лекцій – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2004. – 95 с.

16. Зюков М.Є. Дослідження операцій. Навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни “Дослідження операцій” за кредитно-модульною системою організації навчального процесу для студентів спеціальності 6.050201 “Менеджмент організацій”, 2007 [Електрон. ресурс] – Спосіб доступу: Електрон. чит. зал ПУЕТ

17. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложение в экономическом образовании. – М.: Дело, 2000. – 688 с.