

Модуль I. Елементи лінійної, векторної алгебри та аналітичної геометрії.
Розділ 1. Лінійна алгебра

Тема 1-2. Вступ до вищої математики. Визначники. Матриці.

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, який містить наступні питання теми: визначники, їх властивості, мінори та алгебраїчні доповнення, основні властивості визначників, обчислення визначників вищих порядків, теорема Лапласа, матриця, види матриць; дії з матрицями, обернена матриця, алгоритм знаходження оберненої матриці, ранг матриці, елементарні перетворення матриць.

Термінологічний словник ключових понять

Визначником n -го порядку квадратної числової матриці A називається число, яке знаходиться з елементів матриці A за певним правилом. Визначник матриці A позначається $|A|$, $\det A$ або Δ .

Визначник n -го порядку має такий вигляд:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Числа a_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$) називаються **елементами визначника** (i – номер рядка, j – номер стовпчика квадратної таблиці, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}).

Головна діагональ визначника – це сукупність елементів $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, сукупність елементів $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ – допоміжна діагональ.

Для визначника $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ елементами головної діагоналі є числа 1, 5, 9, допоміжної діагоналі – числа 3, 5, 7.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник $(n-1)$ -го порядку отриманий з визначника n -го порядку викресленням i -го рядка і j -го стовпчика.

Наприклад, у визначнику $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ мінором M_{33} елемента $a_{33} \in M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$. Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} визначається рівністю $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Наприклад, у визначнику (1) алгебраїчним доповненням елемента $a_{32} \in A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Визначником 2-го порядку називається число, що обчислюється за правилом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Наприклад: $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-5) \cdot 3 = 2 + 15 = 17$.

Визначником 3-го порядку називається число, що обчислюється за правилом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}.$$

Наприклад:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & -8 \\ 0 & -8 & 5 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-8) \cdot 5 + (-8) \cdot 0 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \cdot 5 - (-8) \cdot (-8) \cdot 6 - 5 \cdot 4 \cdot 0 - 5 \cdot 5 \cdot 2 =$$

$$= -200 - 0 + 120 - 384 - 0 - 50 = -514.$$

Для обчислення визначника третього порядку можна також користуватися такою схемою:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Визначник n -го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка чи стовпця на їхні алгебраїчні доповнення

$$\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}.$$

Наприклад:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+5} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 \cdot 12 + 1 \cdot (-20) - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 25 = -48 - 20 - 2 + 50 = -20.$$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити визначники:

1. а) $\begin{vmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

2. а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & -1 & 2 \\ 8 & 6 & 8 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 5 \\ 7 & 5 & 9 & 3 \end{vmatrix}$

3. а) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 8 & 4 & -8 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

4. а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

Матрицею називається упорядкована таблиця чисел або інших об'єктів, розміщених у ℓ рядках і n стовпчиках.

Елементи цієї таблиці називаються елементами матриці та позначаються a_{ij} , b_{ij} , ..., де i – номер рядка, j – номер стовпчика.

Матрицю позначають однією великою літерою $A, B, \dots$.

Матрицю, яка має m рядків і n стовпчиків, називають матрицею розміром $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матриця називається матрицею-стовпцем, якщо має лише один стовпець.

Матриця називається матрицею-рядком, якщо вона складається тільки з одного рядка.

Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається нульовою.

Матриця, у якій кількість рядків дорівнює кількості стовпців ($m = n$), називається квадратною.

Квадратна матриця називається невідродженою, якщо її визначник відмінний від нуля.

Елементи квадратної матриці $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ утворюють головну діагональ матриці. Елементи квадратної матриці $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ – допоміжну діагональ.

Діагональною називається квадратна матриця, у якій всі елементи, що не належать головній діагоналі, дорівнюють нулю.

Одинична матриця – це діагональна матриця, у якій всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці. Одинична матриця позначається літерою E , тобто одинична матриця 3-го порядку має вигляд:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Якщо, в матриці B рядки записати стовпцями, зберігаючи їх порядок, то одержана матриця називається транспонованою і позначається A^T , а вказана операція перетворення матриці A називається транспонування матриці A .

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

1. Додавання і віднімання матриць.

Ці операції виконуються тільки для матриць однакової розмірності. Сумою (різницею) матриць A і B , що позначається $A+B$ ($A-B$), називається матриця C , елементи якої $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, де a_{ij} і b_{ij} – відповідно елементи матриць A і B .

Приклад 1.

Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$. Знайти $A+B$, $A-B$.

Розв'язання:

$$A+B = \begin{pmatrix} 3+(-4) & 2+6 & (-8)+(-2) \\ 4+2 & 5+3 & 0+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -10 \\ 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 3-(-4) & 2-6 & (-8)-(-2) \\ 4-2 & 5-3 & 0-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -6 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

2. Множення матриці на число.

Добутком матриці A на число λ , який позначається $\lambda \cdot A$, називається матриця B тієї ж розмірності, елементи якої $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$, де a_{ij} – елементи матриці A .

3. Множення матриць.

Дві матриці можна перемножити, якщо кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці. Добутком матриць $A_{m \times n}$ і $B_{n \times p}$ називається матриця $C_{m \times p} = A \cdot B$, елементи

якого $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$, де a_{ik} і b_{kj} – елементи матриць A і B .

Наприклад, якщо дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 0 & -3 \\ 6 & 0 & 7 & -2 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ тоді}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-3) \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot 5 + 0 \cdot 3 + (-3) \cdot 0 & 4 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-3) \\ 6 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 7 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 & 6 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 7 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 12 \\ 33 & 33 \\ 33 & -2 \end{pmatrix}$$

Знаходження оберненої матриці

Квадратна матриця A^{-1} називається оберненою до квадратної матриці A , якщо виконується умова $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, де E – одинична матриця.

Будь-яка невироджена матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{має обернену матрицю } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A .

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} обчислюють за формулою: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$,
де M_{ij} – мінор елемента a_{ij} .

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник $(n-1)$ -го порядку, отриманий з визначника n -го порядку викресленням i -го рядка і j -го стовпчика. Визначник $(n-1)$ -го порядку отриманий з визначника n -го порядку викресленням i -го рядка і j -го стовпчика.

Приклад 2. Знайти матрицю обернену до матриці $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Розв'язання. Знайдемо визначник матриці A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 = 6 \neq 0.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення матриці A :

$$\begin{aligned} A_{11} = M_{11} &= \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 & A_{21} = -M_{21} &= -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 & A_{31} = M_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \\ A_{12} = -M_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 & A_{22} = M_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 & A_{32} = -M_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \\ A_{13} = M_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 & A_{23} = -M_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 & A_{33} = M_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \end{aligned}$$

Отже, обернена матриця A^{-1} має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійної роботи

Дано дві матриці A і B . Знайти: а) BA ; б) A^{-1} ; в) AA^{-1} .

$$\begin{aligned} 1. A &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} & 2. A &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ 3. A &= \begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} & 4. A &= \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ 8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 10. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 5 & -6 & 4 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

[illegible]

Приклад 3. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо основний визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Допоміжні визначники системи:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -22, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -21.$$

Використовуючи правило Крамера, маємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-22}{-3} = \frac{22}{3}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-21}{-3} = 7.$$

Матричний метод. Якщо записати систему лінійних алгебраїчних рівнянь у матричній формі $A \cdot X = B$, де A – це матриця, що складається із коефіцієнтів при невідомих у системі лінійних алгебраїчних рівнянь, X – матриця невідомих, B – матриця вільних членів системи:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Тоді розв'язок даної системи знаходимо із рівності $X = A^{-1} \cdot B$, де A^{-1} – обернена матриця матриці A .

Приклад 4. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним способом:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо основний визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (2+3) = -10.$$

Для розв'язання цієї системи лінійних рівнянь матричним способом спочатку знаходимо обернену матрицю до матриці A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ тобто матрицю } A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

де $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} ;

M_{ij} – його мінор. Маємо:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3. \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$\text{Таким чином, } A^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,2 & -0,4 \\ 0,2 & -0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Оскільки $X = A^{-1} \cdot B$ – розв'язок цієї системи. Маємо:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,2 & -0,4 \\ 0,2 & -0,3 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 14 + 0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot 2 \\ 0,2 \cdot 14 + 0,2 \cdot 0 - 0,4 \cdot 2 \\ 0,2 \cdot 14 - 0,3 \cdot 0 + 0,1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Звідки $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Метод Гауса. Метод послідовного виключення змінних полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень систему треба привести до трикутного (ступінчастого) вигляду.

Приклад 5. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Розв'язання. Розділимо перше рівняння системи на 3, для того щоб отримати коефіцієнт 1 при змінній x_1 . Після цього перше рівняння системи помножимо на (-2) і додамо до другого; потім перше рівняння помножимо на (-1) та додамо до третього рівняння:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \quad \times(-2), \quad \times(-1) \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Після виконаних елементарних перетворень отримаємо систему:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ -5x_2 - 5x_3 = 0 \\ -2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Розділивши друге рівняння системи на (-5) , отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \quad \times(2) \\ -2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Помножимо друге рівняння системи на 2 і додамо його до третього.

Маємо систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Ми привели систему до трикутного вигляду. Із останнього рівняння маємо: $x_3 = 1$, із другого рівняння: $x_2 = -1$ і, нарешті, підставивши знайдені корені у перше рівняння, отримуємо: $x_1 = 2$.

Отже, розв'язком даної системи є числа $(2; -1; 1)$.

Завдання для самостійної роботи

Перевірити систему лінійних алгебраїчних рівнянь на сумісність і у випадку її сумісності знайти її розв'язок:

- за формулами Крамера;
- матричним способом;
- методом Гауса:

$$1. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$$

Розділ 2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

Тема 4. Вектори. Скалярний, векторний та змішаний добуток. Пряма на площині.

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, який містить наступні питання теми: вектори, лінійні операції з ними, скалярний, векторний, змішаний добуток векторів та їх властивості.

Термінологічний словник ключових понять

Вектором називається величина, яка характеризується не тільки своїм числовим значенням (довжиною), але й напрямком. Вектори позначають $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ або $\overline{AB}, \overline{CD}$.

Нульовим називають вектор, початок і кінець якого збігаються.

Рівними називають вектори, які мають однакову довжину та напрямки.

Колінеарними називають вектори, які розташовані на одній прямій або на паралельних прямих.

Протилежними називають колінеарні протилежно направлені вектори однакової довжини. Вектор протилежний до вектора $\vec{a}$ позначають $(-\vec{a})$.

Компланарними називають вектори, що лежать в одній площині.

Координатами вектора називаються проекції x, y, z цього вектора на осі координат:

$$x = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad y = |\vec{a}| \cos \beta, \quad z = |\vec{a}| \cos \gamma,$$

де $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – напрямні косинуси вектора $\vec{a}$.

Напрямними косинусами вектора називаються косинуси кутів α, β, γ утворених цими вектором з осями координат Ox, Oy, Oz . Для напрямних косинусів виконується рівність $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Якщо вектор $\vec{a} = \overline{M_1 M_2}$, де $M_1 = (x_1; y_1; z_1)$ – початок вектора, $M_2 = (x_2; y_2; z_2)$ – кінець вектора, то координати вектора $\overline{M_1 M_2}$ дорівнюють різниці відповідних координат початку та кінця вектора, тобто: $\overline{M_1 M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Якщо початок вектора знаходиться в точці $M_1 = (1; 2; 5)$ а кінець – у точці $M_2 = (7; -2; 4)$, то вектор $\overline{M_1 M_2} = (7 - 1; -2 - 2; 4 - 5) = (6; -4; -1)$.

Якщо $\vec{a} = (x; y; z)$, то довжина $\vec{a}$ обчислюється за формулою:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1)$$

Наприклад, якщо $\vec{a} = (-6; 3; 1)$ то $|\vec{a}| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{46}$.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Дії з векторами

1. Знаходження алгебраїчної суми векторів.

Координати суми (різниці) скінченної кількості векторів дорівнюють сумі (різниці) відповідних координат цих векторів.

Якщо $\vec{a} = (3; -5; 2)$ і $\vec{b} = (7; 6; -1)$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = (3 + 7; (-5) + 6; 2 + (-1)) = (10; 1; 1);$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (3 - 7; -5 - 6; 2 - (-1)) = (-4; -11; 3).$$

2. Множення вектора на число.

Координати добутку вектора на деяке число λ дорівнюють добуткам відповідних координат вектора на це число.

Якщо $\vec{a} = \left(\frac{3}{4}; -5; 2\right)$ і $\lambda = 4$, то $\lambda \cdot \vec{a} = 4\vec{a} = \left(4 \cdot \frac{3}{4}; 4 \cdot (-5); 4 \cdot 2\right) = (3; -20; 8)$.

Знаходження скалярного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, рівне добутку довжин цих векторів на косинус кута φ між ними:

$$a \cdot b = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi. \quad (2)$$

Також скалярний добуток можна обчислити за формулами

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_b a, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_a b. \quad (3)$$

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані своїми координатами: $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, скалярний добуток

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2. \quad (4)$$

Наприклад, якщо $\vec{a} = (3; 1; -2)$; $\vec{b} = (0; 5; 4)$, то скалярний добуток векторів:
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 5 + (-2) \cdot 4 = 0 + 5 - 8 = -3$.

Із формули (2) косинус кута φ між векторами $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ обчислюємо за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (5)$$

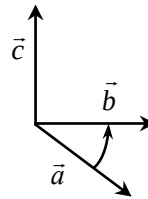
Знаходження векторного добутку двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, що задовольняє такі умови:

- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$;
- 2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
- 3) трійка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – права (рис. 1).

Якщо $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \quad (6) \quad \text{Рис. 1}$$



Модуль векторного добутку чисельно дорівнює площі паралелограма (рис. 2), побудованого на цих векторах

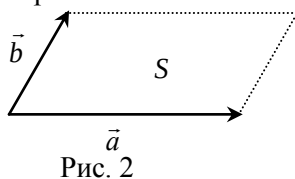


Рис. 2

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| \quad (7)$$

Приклад 6. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (5; 2; 7)$, $\vec{b} = (1; 2; 4)$.

Розв'язання. Знайдемо векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = -6\vec{i} - 14\vec{j} + 8\vec{k}.$$

$$\text{Знайдемо } |\vec{c}| = \sqrt{6^2 + 14^2 + 8^2} = 2\sqrt{74} \quad (\text{кв. од.})$$

Знаходження змішаного добутку трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Змішаним добутком векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається число, що дорівнює скалярному добутку вектора $(\vec{a} \times \vec{b})$ на вектор $\vec{c}$, тобто $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ (чи $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$).

Якщо $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$, то змішаний добуток обчислюється за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (8)$$

Модуль змішаного добутку трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах $V = |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|$ (рис. 3).

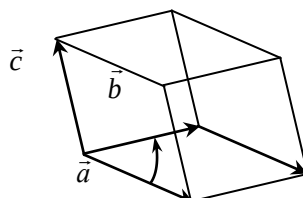


Рис. 3

Приклад 7. У просторі задано чотири точки $A(1;1;1)$, $B(4;4;4)$, $C(3;5;5)$, $D(2;4;7)$. Знайти об'єм піраміди $ABCD$.

Розв'язання. З елементарної математики відомо, що об'єм піраміди $ABCD$ дорівнює одній шостій об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, а останній, у свою чергу, дорівнює модулю мішаного добутку. Отже, маємо:

$$\overrightarrow{AB}=(3;3;3), \quad \overrightarrow{AC}=(2;4;4), \quad \overrightarrow{AD}=(1;3;6);$$

$$V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \text{ (куб. од.)}.$$

Необхідна і достатня умова перпендикулярності двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \text{ або } x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0.$$

Необхідна і достатня умова паралельності двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Необхідна і достатня умова компланарності трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \text{ або } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Вектор $\vec{d}$ називається лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, якщо він дорівнює сумі добутків цих векторів на довільні дійсні числа: $\vec{d} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$.

Будь-який вектор $\vec{a}$ в просторі можна представити у вигляді лінійної комбінації трійки некопланарних (лінійно незалежних) векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, які називаються базисом.

Завдання для самостійної роботи

Дано вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$. Знайти:

а) скалярний добуток векторів $\left(3\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$ та $\left(-\frac{1}{3}\vec{a} + 3\vec{c}\right)$;

б) площу паралелограма, побудованого на векторах $(2\vec{a} + \vec{b})$ та $\left(-3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)$;

в) об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $3\vec{a}, 2\vec{b}, -4\vec{c}$;

г) довести, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис, знайти координати вектора $\vec{d}$ у цьому базисі, якщо:

1. $\vec{a}=(1, -3, 1)$; $\vec{b}=(-2, -4, 3)$; $\vec{c}=(0, -2, 3)$; $\vec{d}=(-8, -10, 13)$.

2. $\vec{a}=(4, 5, 1)$; $\vec{b}=(1, 3, 1)$; $\vec{c}=(-3, -6, 7)$; $\vec{d}=(19, 33, 0)$.

3. $\vec{a}=(3, -1, 2)$; $\vec{b}=(-2, 4, 1)$; $\vec{c}=(4, -5, -1)$; $\vec{d}=(-5, 11, 1)$.

4. $\vec{a}=(3, 1, 2)$; $\vec{b}=(-4, 3, -1)$; $\vec{c}=(2, 3, 4)$; $\vec{d}=(14, 14, 20)$.

Лінії на площині

Кутовий коефіцієнт – коефіцієнт при x у рівнянні прямої лінії на площині, розв'язаному відносно y .

Канонічне рівняння – найпростіше рівняння кривої II-го порядку.

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

Ексцентриситет – відношення $\frac{c}{a}$ для еліпса, гіперболи, у параболи $\varepsilon = 1$.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Різновиди рівняння прямої на площині

Загальне рівняння $Ax + By + C = 0$. (1)

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом (рис. 4)

$$y = kx + b, \quad (2)$$

де $k = \operatorname{tg} \alpha$, α – кут нахилу прямої до осі Ox .

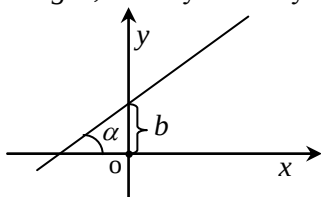


Рис. 4

Канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \quad (3)$$

де $M_0(x_0; y_0)$ – точка, через яку проходить пряма паралельно заданому вектору $\vec{S}(l; m)$.

Параметричне рівняння:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \quad (4)$$

Рівняння прямої у відрізках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (5)$$

де a, b – відрізки, які відтинає пряма від координатних осей Ox, Oy відповідно.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (6)$$

Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ в заданому напрямку ($\operatorname{tg} \alpha = k$):

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (7)$$

Взаємне розміщення двох прямих

Прямі $l_1: y = k_1x + b_1$, $l_2: y = k_2x + b_2$

– перетинаються $\Leftrightarrow k_1 \neq k_2$, кут φ між цими прямими (рис. 5) знаходиться за формулою

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2};$$

– паралельні $\Leftrightarrow k_1 = k_2, b_1 \neq b_2$;

– співпадають $\Leftrightarrow k_1 = k_2, b_1 = b_2$;

– перпендикулярні $\Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

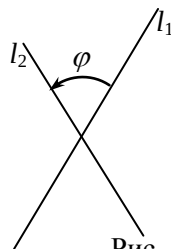


Рис. 5

Точка перетину прямих

Якщо дві прямі задані загальними рівняннями $Ax_1 + By_1 + C_1 = 0$, $Ax_2 + By_2 + C_2 = 0$, то координати їх точки перетину можуть бути знайдені із системи рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Відстань від точки до прямої

Відстань d від заданої точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ знаходиться за формулою (8):

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (8)$$

Приклад 8. Дано дві вершини трикутника $A(2; -3)$, $B(5; 1)$, рівняння сторони $BC: x + 2y - 7 = 0$ і медіани $AM: 5x - y - 13 = 0$. Скласти рівняння висоти, опущеної з вершини C , обчислити її довжину, знайти кут трикутника при вершині A .

Нехай вершина трикутника $C(x_1; y_1)$. Тоді точка з координатами $x_2 = \frac{5+x_1}{2}$; $y_2 = \frac{1+y_1}{2}$ лежить на медіані, тобто виконується рівність $5\left(\frac{5+x_1}{2}\right) - \frac{1+y_1}{2} - 13 = 0$. Крім того, точка C лежить на прямій BC . Отже, маємо систему рівнянь для знаходження координат $(x_1; y_1)$:

$$\begin{cases} 5x_1 - y_1 - 2 = 0 \\ x_1 + 2y_1 - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 3 \end{cases}$$

Знайдемо рівняння прямих AB і AC , використовуючи рівняння прямої, маємо:

$$AB: \frac{y+3}{1+3} = \frac{x-2}{5-2} \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{17}{3};$$

$$AC: \frac{y+3}{3+3} = \frac{x-2}{1-2} \Rightarrow y = -6x + 9.$$

Висота проходить через точку C перпендикулярно до прямої AB . Використаємо умову перпендикулярності двох прямих і знайдемо кутовий коефіцієнт висоти $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{3}{4}$.

Знайдемо рівняння висоти: $y - 3 = -\frac{3}{4}(x - 1) \Rightarrow 3x + 4y - 15 = 0$.

Довжину висоти знайдемо як відстань від точки $C(1; 3)$ до прямої AB :

$$h = \frac{|4 \cdot 1 - 3 \cdot 3 - 17|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{22}{5} = 4,4.$$

Щоб обчислити кут A , скористаємось формулою для знаходження кута між двома прямими:

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-6 - \frac{4}{3}}{1 - 6 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{22}{21}; \quad \hat{A} = \operatorname{arctg} \frac{22}{21}.$$

Приклад 9. Знайти відстань між паралельними прямими $2x - y + 3 = 0$ та $2x - y - 5 = 0$.

Розв'язання. Відстань d між паралельними прямими можна розглядати як відстань від точки, що належить одній із цих прямих, до іншої прямої.

Знайдемо координати однієї із точок M , що належить прямій $2x - y + 3 = 0$. Нехай $x=1$, тоді $y=5$.

Відстань від точки $M(1; 5)$ до прямої $2x - y - 5 = 0$ дорівнює: $d = \frac{|2 \cdot 1 - 5 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$ (лін. од.).

Завдання для самостійної роботи

Задані координати вершин трикутника ABC . Знайти:

- рівняння сторін трикутника та їх довжини;
- рівняння висоти AN , проведеної із вершини A трикутника та її довжину;
- рівняння медіани CM , проведеної з вершини C ;
- рівняння прямої, що проходить через вершину C паралельно до сторони AB ;
- внутрішній кут B трикутника ABC ;
- площу трикутника ABC , якщо:

1. $A(4; -3); B(-1; 4); C(5; 6)$.
2. $A(4; 3); B(6; -1); C(2; 4)$.
3. $A(4; 7); B(0; 4); C(3; 0)$.
4. $A(4; -4); B(-1; 0); C(5; 6)$.
5. $A(4; 3); B(5; -1); C(2; 8)$.
6. $A(2; 4); B(0; 1); C(3; -1)$.
7. $A(2; 2); B(0; -1); C(3; 1)$.
8. $A(3; 0); B(5; 4); C(-1; 2)$.
9. $A(2; 0); B(7; 5); C(3; 7)$.
10. $A(3; 2); B(4; 3); C(-1; 6)$.

Тема 5. Площина у просторі. Пряма у просторі.

Слід розглянути теоретичний матеріал з наступних питань теми: рівняння площини; кут між площинами, відстань від точки до площини; рівняння прямої у просторі; взаємне розміщення прямої і площини у просторі.

Термінологічний словник ключових понять

Нормальний вектор площини – вектор $\vec{N} = (A, B, C)$, перпендикулярний до площини.

Напрямний вектор прямої – вектор $\vec{s} = (m, n, p)$ колінеарний прямій у просторі.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Площина

У декартовій прямокутній системі координат $Oxyz$ площина визначається лінійним рівнянням виду:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (1)$$

де числа A, B, C одночасно не дорівнюють нулю.

Будь-який перпендикулярний до площини вектор $\vec{n}(A; B; C)$ називається нормальним вектором площини (рис. 10).

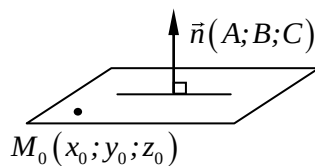


Рис. 10

Рівняння площини за даною точкою $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і заданим ненульовим нормальним вектором $\vec{n}(A; B; C)$ має вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (2)$$

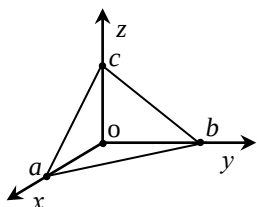
Приклад 13. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $P(1; 2; -1)$ і перпендикулярна до вектора $\vec{n}(2; 3; 1)$.

Розв'язання. Шукане рівняння має вигляд: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Використовуючи формулу (2) та умову задачі, маємо: $2(x - 1) + 3(y - 2) + 1(z + 1) = 0$ або $2x + 3y + z - 7 = 0$.

Рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, які не лежать на одній прямій:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Рівняння площини у «відрізках» на осях (рис. 11):



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (4)$$

де $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ – відрізки, які відтинаються площиною по осях координат Ox, Oy, Oz , відповідно.

Рис. 11

Кут між двома площинами (рис. 12).

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ і } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

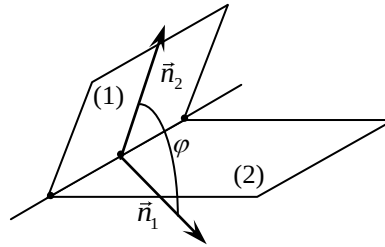


Рис. 12

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (5)$$

Взаємне розміщення двох площин

$$1. \text{ Умова паралельності: } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (6)$$

$$2. \text{ Умова перпендикулярності: } A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (7)$$

$$\text{Площини збігаються, якщо } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Приклад 14. Записати рівняння площин, що проходять:

1) паралельно площині Oxz і через точку $(2; -5; 3)$;

2) через вісь Oz і точку $(-3; 1; -2)$;

3) паралельно осі Ox і через точки $(4; 0; -2)$ і $(5; 1; 7)$.

Розв'язання. 1. Рівняння шуканої площини $Bu + D = 0$ або $y = \frac{-D}{B}$. Точка $(2; -5; 3)$ лежить у площині, тобто задовольняє останнє рівняння: $-5 = \frac{-D}{B}$; остаточно маємо: $y = -5$, або $y + 5 = 0$.

2. Рівняння шуканої площини $Ax + Bu = 0$ або $x + \left(\frac{B}{A}\right)y = 0$. Підставимо координати точки $(-3; 1; -2)$ у це рівняння $-3 + \frac{B}{A} = 0$, $\frac{B}{A} = 3$.

Остаточне рівняння шуканої площини набуває вигляду $x + 3y = 0$.

3. Рівняння площини, паралельної осі Ox , має вигляд: $Bu + Cz + D = 0$.

Підставляючи в нього по чергово координати точок $(4; 0; -2)$ і $(5; 1; 7)$, отримаємо систему:

$$\begin{cases} -2C + D = 0 \\ B + 7C + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{D}{C} = 2 \\ \frac{B}{C} + \frac{D}{C} = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{D}{C} = 2 \\ \frac{B}{C} = -9 \end{cases}$$

Отже, шукане рівняння має вигляд $9y - z - 2 = 0$.

Відстань від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини (рис. 13):

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (8)$$

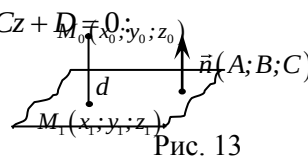


Рис. 13

Приклад 15. Визначити відстань від точки $C(2; -3; 2)$ до площини, яка проходить через точки $M_1(-3; 0; 1)$; $M_2(0; 2; 3)$; $M_3(3; 1; -1)$.

Розв'язання. Напишемо рівняння площини, що проходить через три точки M_1, M_2, M_3 .

$$\text{Воно має вигляд: } \begin{vmatrix} x+3 & y & z-1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, отримаємо: $2x - 6y + 3z + 3 = 0$.

Знайдемо відстань від точки C до шуканої площини за формулою:

$$d = \frac{|2 \cdot 2 - 6 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2}} = \frac{31}{7}.$$

Пряма в просторі

Канонічне рівняння прямої в просторі (рис. 14):

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}, \quad (9)$$

де $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – задана точка прямої L ;

$\vec{S}(l; m; n)$ – напрямний вектор прямої L .

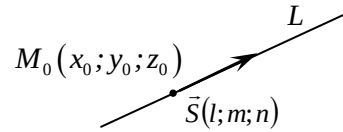


Рис. 14

Параметричне рівняння прямої, що проходить через точку M_0 в напрямку вектора $\vec{S}(l; m; n)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad (10)$$

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (11)$$

Пряма як перетин двох площин $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Приклад 16. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $P(1; 2; -1)$ і перпендикулярна до векторів $\vec{n}_1(1; 2; -3)$ і $\vec{n}_2(2; -1; 2)$.

Розв'язання. Направний вектор $\vec{S}$ прямої перпендикулярний векторам $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$, можна знайти за формулою:

$$\vec{S} = [\vec{n}_1 \times \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} - 8\vec{j} - 5\vec{k}, \quad \vec{S}(1; -8; -5).$$

Шукане канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку P і має напрямний вектор $\vec{S}$, набуває вигляду: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-8} = \frac{z+1}{-5}$.

Кут між двома прямими

$(L_1): \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ і $(L_2): \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ у просторі:

$$\cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (13)$$

Умова паралельності та перпендикулярності двох прямих у просторі

1) $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ – умова перпендикулярності.

2) $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ – умова паралельності.

Якщо прямі не паралельні і не збігаються, то вони або перетинаються, або є мимобіжними (рис. 15).

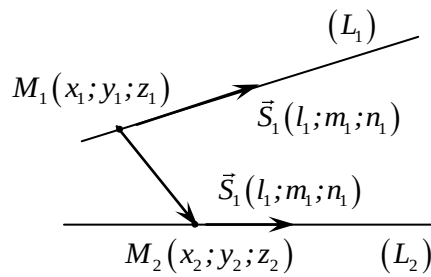


Рис. 15

У кожному з цих випадків повинні виконуватись дві умови:

Якщо прямі перетинаються, то

1) $\frac{l_1}{l_2} \neq \frac{m_1}{m_2} \neq \frac{n_1}{n_2}$ (напрямні вектори прямих неколінеарні);

2) вектори $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{S}_1, \vec{S}_2$ – компланарні, а отже, їх змішаний добуток дорівнює нулю, тобто $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = 0$.

Якщо прямі мимобіжні, то:

1) $\frac{l_1}{l_2} \neq \frac{m_1}{m_2} \neq \frac{n_1}{n_2}$ і 2) $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \neq 0$.

Відстань від точки до прямої у просторі

Відстань d від точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до прямої L (13), дорівнює висоті паралелограма побудованого на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ і $\vec{S}$ (рис. 16) і може бути обчислена за формулою:

$$d = \frac{S_{\text{пар}}}{|\vec{S}|} = \frac{|\vec{S} \times \overrightarrow{M_0M_1}|}{|\vec{S}|} \quad (14)$$

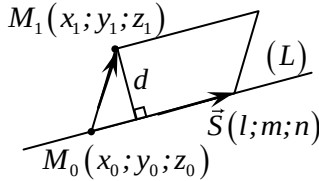


Рис. 16

Взаємне розміщення прямої і площини

Кут (рис. 17) між площиною $Ax + By + Cz + D = 0$ і прямою $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ можна розглядати як

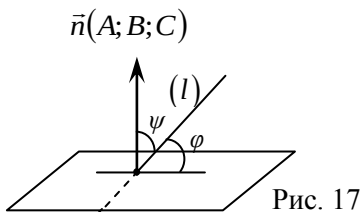


Рис. 17

$$\sin \varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \quad (15)$$

Умова паралельності та перпендикулярності прямої (9) і площини (1):

1) $Al + Bm + Cn = 0$ – умова паралельності;

2) $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$ – умова перпендикулярності.

Якщо $Al + Bm + Cn \neq 0$, то пряма (9) перетинає площину (1) в точці, координати якої визначаються за системою:

$$\begin{cases} x = x_0 - l \cdot \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn} \\ y = y_0 - m \cdot \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn} \\ z = z_0 - n \cdot \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn} \end{cases} \quad (16)$$

Якщо $Al + Bm + Cn = 0$ і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то пряма (9) розміщена в площині (1).

Завдання для самостійної роботи

1. Дано чотири точки A_1, A_2, A_3, A_4 . Скласти рівняння: 1) площини $A_1A_2A_3$; 2) прямої A_1A_2 ; 3) прямої A_1M , яка перпендикулярна до площини $A_1A_2A_3$; 4) прямої A_3N , яка паралельна до прямої A_1A_2 ; 5) площини, що проходить через точку A_4 перпендикулярно до прямої A_1A_2 ; 6) знайти об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; зробити малюнок; 7) обчислити синус кута між прямою A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

1. $A_1(2;4;3); A_2(1;1;5); A_3(4;9;3); A_4(3;6;7)$.

2. $A_1(4;2;5); A_2(0;7;1); A_3(0;2;7); A_4(1;5;0)$.

3. $A_1(6;8;2); A_2(5;4;7); A_3(2;4;7); A_4(7;3;7)$.

2. Пряма задана загальним рівнянням. Записати рівняння прямої у канонічному та параметричному вигляді.

1.
$$\begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 3x - y + 3z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 3x - y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

Тема 6. Лінії другого порядку.

Загальне рівняння кривих другого порядку має вигляд:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

де A, B, C одночасно не дорівнюють нулю, тобто $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

До ліній другого порядку відносяться коло, еліпс, гіпербола, парабола.

Коло

Колом називається множина всіх точок площини, рівновіддалених від даної точки (центра).

Якщо R – радіус кола, а точка $C(x_0; y_0)$ – центр кола (рис. 6), то її канонічне рівняння має вигляд:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

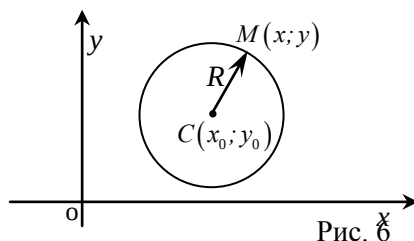


Рис. 6

У частинному випадку, рівняння кола з центром в початку координат ($x_0 = y_0 = 0$) має вигляд $x^2 + y^2 = R^2$.

Еліпс

Еліпсом (рис. 7) називається геометричне місце точок площини, сума відстаней від кожної з яких до двох даних точок F_1 і F_2 (фокусів) є величина стала і рівна $2a$, тобто $r_1 + r_2 = 2a$, де r_1, r_2 – фокальні радіус-вектори довільної точки $M(x; y)$ еліпса, a і b – півосі еліпса.

Канонічне рівняння еліпса з центром в точці $C(x_0; y_0)$:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

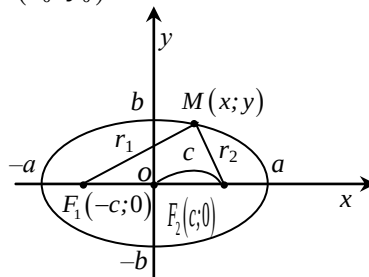


Рис 7.

У частинному випадку, якщо центр симетрії знаходиться в початку

координат (рис. 7), то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b)$.

$F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$ – фокуси еліпса, де $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Відношення $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ($0 \leq \varepsilon \leq 1$) називається *ексцентриситетом* еліпса. Ексцентриситет характеризує форму еліпса.

Фокальні радіус-вектори: $r_1 = a + \frac{c}{a}x, r_2 = a - \frac{c}{a}x$.

Гіпербола

Гіперболою (рис. 8) називається геометричне місце точок площини, для яких абсолютна величина різниці відстаней до двох даних точок F_1 і F_2 (фокусів) є величиною сталою і рівною $2a$, тобто $|r_1 - r_2| = 2a$, де r_1 і r_2 – фокальні радіус-вектори довільної точки $M(x; y)$ гіперболи.

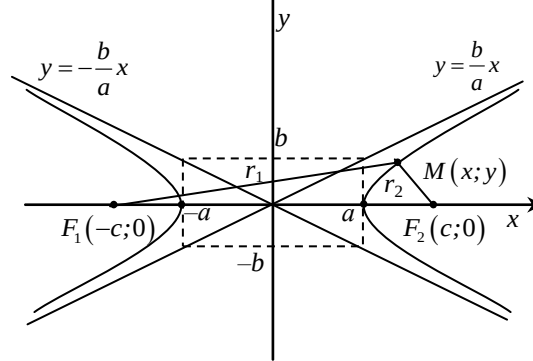


Рис. 8

Канонічне рівняння гіперболи з центром в точці $C(x_0; y_0)$:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

У частинному випадку, якщо $C(0; 0)$ – початок координат, то $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$),

де a – дійсна; b – уявна півосі; $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – напівфокусна відстань;

$F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$ – фокуси гіперболи. Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ($\varepsilon > 1$) називається *ексцентриситетом* гіперболи.

Фокальні радіус-вектори гіперболи: $r_1 = a + \frac{c}{a}x, r_2 = \frac{c}{a}x - a$.

Рівняння асимптот гіперболи: $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Приклад 10. Записати рівняння гіперболи, яка проходить через точку $A(6; 9)$, якщо:

- 1) відстань між фокусами дорівнює 8, а відстань між директрисами – 6;
- 2) директриси задано рівняннями $x = -3\sqrt{2}, x = 3\sqrt{2}$, а кут між асимптотами – прямий;
- 3) ексцентриситет дорівнює $\varepsilon = 2$, а уявна піввісь $b = 3$;
- 4) асимптоти задано рівнянням $y = \pm \frac{5}{3}x$.

Розв'язання. 1) Координати фокусів $F_1(-c; 0); F_2(c; 0)$, тому з умови $2c = 8; c = 4$, відстань між директрисами $6 = \frac{2a}{\varepsilon}$. Звідки, враховуючи, що $e = \frac{c}{a}$, маємо: $a = 12, b = c - a = 4$. Остаточно

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

2) З рівнянь директрис маємо: $\frac{a}{\varepsilon} = 3\sqrt{2}$, якщо кут між асимптотами прямий, то $a=b$. Отже, враховуючи формулу $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$, маємо $\varepsilon = \sqrt{2}$ і $a=6$; $b=6$. Остаточно запишемо рівняння шуканої гіперболи: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{36} = 1$.

3) З формули маємо: $\frac{3}{a} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$, звідки $a = \sqrt{3}$. Отже, $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$.

4) Точка A належить гіперболі, тому маємо: $\frac{36}{a^2} - \frac{81}{b^2} = 1$. З рівняння асимптот гіперболи випливає співвідношення $\frac{b}{a} = \frac{5}{3}$, $\Rightarrow b = \frac{5}{3}a$. Підставивши b в останнє співвідношення, маємо рівняння для знаходження a^2 :

$$\frac{36}{a^2} - \frac{81 \cdot 9}{25a^2} = 1; a^2 = \frac{171}{25}; b^2 = 19. \text{ Отже, } \frac{25x^2}{171} - \frac{y^2}{19} = 1.$$

Парабола

Параболою (рис. 9) називається геометричне місце точок площини, однаково віддалених від однієї точки F (фокуса) і даної прямої (директриси).

Канонічне рівняння параболи

з вершиною в точці $C(x_0; y_0)$

(вітки напрямлені вправо):

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$

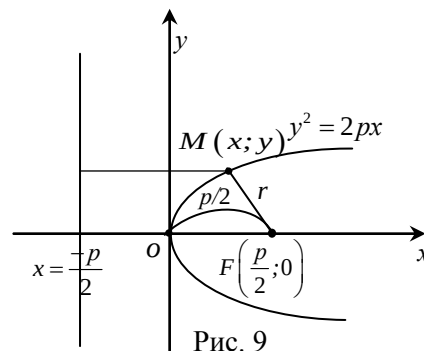


Рис. 9

У частинному випадку, якщо вершина знаходиться в початку координат $C(0; 0)$, то рівняння має вигляд: $y^2 = 2px$.

Інші види канонічних рівнянь параболи:

$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$ – вітки напрямлені вліво;

$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ – вітки напрямлені вгору;

$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$ – вітки напрямлені вниз.

Для параболи ексцентриситет дорівнює 1.

Приклад 11. Знайти геометричне місце точок, однаково віддалених від точки $A(2; 0)$ і прямої $x + 1 = 0$.

Розв'язання. Нехай точка $M(x, y)$ така, що $|AM| = d$, де d – відстань від точки M до прямої $x + 1 = 0$.

Оскільки $|AM| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$, а $d = \frac{|x+1|}{\sqrt{1}} = |x+1|$, то маємо рівняння: $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = |x+1|$;

$$(x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2;$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - x^2 - 2x - 1 = 0;$$

$$y^2 - 6x + 3 = 0; y^2 = 6x + 3.$$

$$y^2 = 6\left(x + \frac{1}{2}\right), \text{ яке визначає на площині параболу.}$$

Приклад 12. Визначити тип кривої $2x^2 - 4x + y^2 - 6y - 5 = 0$, записавши її канонічне рівняння.

Розв'язання. Об'єднаємо члени рівняння, які містять x та y окремо; одержимо:
 $(2x^2 - 4x) + (y^2 - 6y) - 5 = 0$.

Виділимо повні квадрати: $2(x^2 - 2x) + (y^2 - 6y) - 5 = 0$;

$$2[(x-1)^2 - 1] + (y-3)^2 - 9 - 5 = 0;$$

$$2(x-1)^2 - 2 + (y-3)^2 - 9 - 5 = 0;$$

$$2(x-1)^2 + (y-3)^2 = 16;$$

$$\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{(x')^2}{8} + \frac{(y')^2}{16} = 1.$$

Це канонічне рівняння еліпса в системі координат, початок якої знаходиться в точці $O'(1; 3)$.

Завдання для самостійної роботи

Визначити вид кривої, знайти її параметри та побудувати її.

1. а) $2y^2 - 8y + 9x - 6 = 0$; 2. а) $2x^2 + 5y^2 + 8x - 10y - 17 = 0$;
б) $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100 - 316 = 0$; б) $3x^2 - 5y^2 + 9x - 6 = 0$;
в) $2x^2 + 4y^2 + 4x - 2y - 18 = 0$; в) $x^2 - 4y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$;
г) $2x^2 + 2y^2 - 20x + 4y - 18 = 0$. г) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 36y - 18 = 0$.

Модуль 2. Математичний аналіз

Розділ 3. Диференціальне числення функції однієї змінної.

Тема 7. Функція. Похідна функції однієї змінної. Диференціал функції однієї змінної. Дослідження функцій за допомогою похідних.

Методичні поради до вивчення теми

Слід розглянути теоретичний матеріал з наступних питань теми: поняття границі функції, розкриття невизначеностей, I-ша та II-га чудові границі, неперервність функцій та їх властивості, класифікація точок розриву.

Термінологічний словник ключових понять

Функція – це така відповідність між множинами D та E , при якій кожному значенню змінної $x \in D$ відповідає одне й тільки одне значення $y \in E$.

Область визначення функції – це множина всіх значень аргументу, для яких можна обчислити значення функції.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена у деякому околі точки $x = a$, за винятком, хіба що, самої точки $x = a$.

Означення. Число b називається границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow a$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке що при $|x - a| < \delta$ виконується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

**Розкриття невизначених виразів типу $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty - \infty]$
для алгебраїчних функцій**

При виконанні граничного переходу у виразах типу $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, коли порушуються умови теореми про граничний перехід при арифметичних операціях, розв'язання задачі у ряді випадків зводиться до аналізу невизначених виразів виду $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty - \infty]$.

Невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ для раціональних функцій

Многочлен $P_n(x)$ називається упорядкованим, якщо

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n.$$

Теорема Безу. Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен типу $x-a$ дорівнює значенню многочлена при $x=a$, тобто $P_n(a)$.

Наслідок. Якщо число a – корінь многочлена $P_n(x)$, тобто $P_n(a)=0$, то многочлен $P_n(x)$ ділиться без остачі на двочлен $x-a$.

Наприклад:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 6x - 5}{x^2 - 1} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 - x + 5)}{(x-1)(x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 5}{x+1} = \frac{1-1+5}{1+1} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$ для ірраціональних функцій

Для розв'язку задач у цьому випадку рекомендується звільнитись від тих ірраціональних множників у чисельнику і знаменнику дробового виразу, які перетворюються на нуль при виконанні граничного переходу. Для звільнення від радикалів використовують формули скороченого множення, заміну змінної та інші штучні прийоми.

Наприклад:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1} - 2)(\sqrt{x-1} + 2)}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x-1} + 2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$

У цьому випадку і чисельник, і знаменник рекомендується поділити на найбільший степінь змінної, що входить як до знаменника, так і до чисельника.

Приклад.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{x} + x + 1}{2\sqrt{x^3} + x - 10x} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x\sqrt{x} + x + 1}{x\sqrt{x}}}{\frac{2\sqrt{x^3} + x - 10x}{x\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}}{2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{10}{\sqrt{x}}}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Невизначеність $[\infty - \infty]$

Цей тип невизначеності зводиться до невизначеностей $\left[\frac{0}{0} \right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, наприклад, зведенням виразу до спільного знаменника, множенням на спряжений вираз.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x-2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1-x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Перша та друга визначні границі

Перша визначна границя: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = 1.$

Приклад 17. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}.$

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5x}{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \frac{5}{3}.$

Друга визначна границя: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{a \rightarrow 0} (1+a)^{\frac{1}{a}} = [1^\infty] = e \approx 2,71828.$

Приклад 18. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-2}\right)^{3x}.$

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-2}\right)^{3x} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x+1}{2x-2} - 1\right)^{3x} =$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2x-2}\right)^{3x \cdot \frac{2x-2}{3} \cdot \frac{3}{2x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{2x-2}} = e^{\frac{3}{2}}.$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити границі:

- 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4x^2 - 25x + 25}{2x^2 - 15x + 25}$ при а) $x_0 = 2$; б) $x_0 = 5$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{6x^2 + 13x + 7}{3x^2 + 8x + 5}$ при а) $x_0 = -2$; б) $x_0 = -1$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 + 5x - 8}{2x^2 + 3x - 5}$ при а) $x_0 = -2$; б) $x_0 = 1$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + 15x + 25}{x^2 + 5x + 50}$ при а) $x_0 = 5$; б) $x_0 = -5$;

2. Обчислити границі:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x}}{x-4};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x-2} - \sqrt{6-x}};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{9-x}}{x-5};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+7} - \sqrt{3-x}}{x+2};$

3. Обчислити границі:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 2x)}{3x};$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{2n+5}\right)^{3n+2}.$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 4x \cdot \operatorname{tg} 5x;$
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n-4}\right)^{2n-7}.$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x};$
- 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-6}{n-4}\right)^{4n+2}.$

Похідна функції

Методичні поради до вивчення теми

Слід розглянути теоретичний матеріал з наступних питань теми: означення похідної; геометричний зміст похідної; економічний зміст похідної; залежність між неперервністю і диференційованістю функції; основні правила диференціювання; таблиця похідних елементарних функцій; похідні вищих порядків; диференціал функції.

1.3. Термінологічний словник ключових понять

Геометричний зміст похідної – похідна $f'(x)$ чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x .

Диференціал функції однієї змінної – це добуток $f'(x)\Delta x$.

Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Позначення похідної: y' , $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$.

Знаходження похідної функції називається диференціюванням цієї функції. Якщо функція в точці x має скінченну похідну, то функція називається диференційованою в цій точці.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Основні правила диференціювання

1. $C' = 0$, $C = \text{const}$.
2. $x' = 1$.
3. $(U \pm V)' = U' \pm V'$.
4. $(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$.
5. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$, $V \neq 0$.

Похідні основних елементарних функцій

- | | |
|--|---|
| 1. $x' = 1$. | 9. $(\cos x)' = -\sin x$. |
| 2. $(x^n)' = nx^{n-1}$. | 10. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. |
| 3. $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$. | 11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$. |
| 4. $(e^x)' = e^x$. | 12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. |
| 5. $(a^x)' = a^x \ln a$. | 13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. |
| 6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. | 14. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$. |
| 7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$. | 15. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$. |
| 8. $(\sin x)' = \cos x$. | |

Похідна складної (складеної) функції та неявно заданої функції

Якщо $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ диференційовані функції своїх аргументів, то похідна функції від функції (або складеної функції) $y = f(\varphi(x))$ існує і дорівнює добутку похідної даної функції y по проміжному аргументу і похідній проміжного аргументу u по незалежній змінній x :

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Приклад 19. Знайти похідну функції $y = \sin^3 5x$.

Розв'язання. $y' = 3\sin^2 5x \cdot \cos 5x \cdot 5 = 15\sin^2 5x \cdot \cos 5x$.

Нехай маємо неявно задану функцію $F(x; y) = 0$. Для знаходження похідної функції заданої неявно, потрібно продиференціювати обидві частини рівняння, розглядаючи y як функцію від x , потім із отриманого рівняння знайти y' .

Приклад 20. Знайти похідну неявно заданої функції $x^3 - 2xy + \ln y + \sin y^2 = 10$.

Розв'язання. $3x^2 - (2y + 2x \cdot y') + \frac{1}{y} \cdot y' + \cos y^2 \cdot 2y \cdot y' = 0$;

$$y' \left(-2x + \frac{1}{y} + 2y \cdot \cos y^2 \right) = 2y - 3x^2;$$

$$y' = \frac{2y - 3x^2}{-2x + \frac{1}{y} + 2y \cdot \cos y^2}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти похідні функцій:

1) $y = 2x^5 + \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}$;

2) $y = \frac{3}{x} - 4x^3 + \frac{2}{x^4}$;

3) $y = 3x^8 - x^4 + \frac{2}{x}$;

4) $y = 7\sqrt{x} - 3x^3 + \frac{4}{x}$;

5) $y = 7x + \frac{5}{x^2} + x^6 - 1$;

6) $y = 5x^2 - \ln x + x^5 - \frac{5}{x}$;

7) $y = 3x^5 - \frac{3}{x} - \ln x + \frac{10}{x^5}$;

8) $y = e^x + \frac{3}{x} - 4x^6 + \frac{4}{x^5}$;

9) $y = 8x^4 + 2x^2 - \frac{4}{x} - \ln x$;

10) $y = 4x^6 + \frac{5}{x} - \sin x - \frac{7}{x^4}$;

2. Знайти похідні функцій, що задані неявно:

а) $y^2x + 4x^4 - 3y^4x^2 + 3y - 1 = 0$; б) $3y^2x^5 - 3y^5x^2 + 3y + 2x^5 - 1 = 0$;

а) $5y^2x^3 + 4y^4 - 3y^4x^2 + 3y^3 - 1 = 0$; б) $y^2 + 4x^4 - 3y^4x^2 + 12y - 1 = 0$;

3. Знайти похідну функції:

1) $y = \sin^3 2x \cdot \cos 8x$;

2) $y = \operatorname{tg}^3 2x \cdot \cos 3x$;

3) $y = \sin 8x \cdot (8x^2 + 2x)$;

4) $y = \sin x \cdot \cos^3 8x$;

Похідні вищих порядків

Похідна $f'(x)$ від функції $f(x)$ сама є функцією, що також може мати похідну. Тому, якщо $f'(x)$ – це похідна першого порядку, $(f'(x))' = f''(x)$ – похідна другого порядку і т. д.

Похідною n -го порядку $f^{(n)}(x)$ називається похідна від похідної $(n-1)$ порядку.

Приклад 21. Знайти $y'''(x)$, якщо $y = 3e^{5x}$.

Розв'язання. $y' = 3e^{5x} \cdot 5 = 15e^{5x}$;

$$y'' = 15e^{5x} \cdot 5 = 75e^{5x};$$

$$y''' = 75e^{5x} \cdot 5 = 375e^{5x}.$$

Застосування похідної. Диференціал функції

Правило Лопітала

Границя відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення їх похідних, якщо останні існують.

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left[\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Приклад 22. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 5x + 6)'}{(x^2 - 4)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 5}{2x} = \frac{1}{4}.$

Зростання і спадання функції

Достатня умова зростання (спадання) функції: якщо похідна диференційованої функції додатна (від'ємна) всередині деякого проміжку X , то вона на цьому проміжку зростає (спадає).

Екстремуми функції

Точка x_0 називається точкою максимуму (мінімуму) функції $y = f(x)$, якщо в деякому околі точки x_0 виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Максимум і мінімум – екстремуми функції, або локальні екстремуми.

Необхідна умова екстремуму. Для того, щоб функція $y = f(x)$ мала екстремум в точці x_0 , необхідно, щоб її похідна в цій точці дорівнювала нулю або не існувала.

Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються критичними точками I роду (ці точки повинні входити в область визначення функції). Критична точка не обов'язково є точкою екстремуму.

Перша достатня умова екстремуму функції. Якщо при переході через точку x_0 похідна змінює свій знак із «+» на «-», то точка x_0 – точка максимуму, а якщо із «-» на «+» – точка мінімуму.

Друга достатня умова екстремуму функції. Нехай функція $y = f(x)$ двічі диференційовна і $f'(x) = 0$. Тоді в точці x_0 функція має локальний максимум, якщо $f''(x_0) < 0$ і локальний мінімум, якщо $f''(x_0) > 0$.

Крива $y = f(x)$ називається опуклою на інтервалі $(a; b)$, якщо всі точки кривої лежать нижче її дотичних на цьому інтервалі.

Крива $y = f(x)$ називається вгнутою на інтервалі $(a; b)$, якщо всі точки кривої лежать вище будь-якої дотичної на цьому інтервалі.

Достатня умова опуклості (вгнутості) графіка функції. Якщо в усіх її точках інтервалу $(a; b)$ друга похідна функції $y = f(x)$ від'ємна (додатня), то функція $y = f(x)$ опукла (вгнута).

Точка кривої, що відокремлює її опуклу частину від вгнутої, називається *точкою перегину кривої*.

Необхідна і достатня умова існування точки перегину. Якщо в точці x_0 друга похідна функції дорівнює нулю або не існує і при переході через цю точку друга похідна змінює знак, то точка x_0 є точкою перегину.

Пряма називається *асимптотою* кривої $y = f(x)$, якщо відстань від точки $M(x; f(x))$ до цієї прямої прямує до нуля при віддаленні точки M у нескінченність.

Вертикальні асимптоти: $x = a$ – вертикальна асимптота $y = f(x)$, якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, тобто функція має розрив в точці $x = a$.

Похила асимптота: $y = kx + b$ – похила асимптота, де $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$.

Якщо $k = 0 \Rightarrow y = b$ – горизонтальна асимптота.

Схема дослідження графіка функції:

1. Область визначення функції.
2. Парність непарність, періодичність.
3. Точки перетину з осями координат.
4. Рівняння асимптот, якщо вони є.
5. Критичні точки I-го роду, інтервали монотонності, точки екстремумів.
6. Критичні точки II-го роду, інтервали опуклості, вгнутості, точки перегину.
7. Побудова графіка функції.

Приклад 23. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції

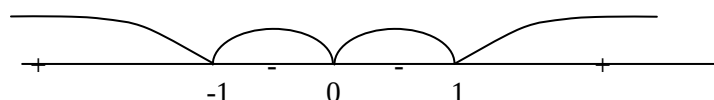
$$y = \frac{x^2}{x^2 - 1}.$$

Розв'язання.

1. Область визначення функції: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; адже при $x^2 - 1 = 0$ ця функція не існує і тому $x \neq \pm 1$.

2. $f(x) = f(-x)$ – функція є парною, її графік симетричний відносно вісі OY, функція не періодична.

$$3. y = \frac{x^2}{x^2 - 1} \geq 0 \Rightarrow x^2(x-1) \cdot (x+1) \geq 0.$$



Отже, при $x \in (-\infty; -1)$ графік y розміщений над віссю OX , при $x \in (-1; 1)$ він розміщений під прямою $y=0$ і при $x \in (1; +\infty)$ – над прямою OX .

4. Оскільки $\lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \pm \infty$, то $x=1$ і $x=-1$ – вертикальні асимптоти досліджуваної функції,
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 \Rightarrow y=1$ – горизонтальна асимптота функції.

Похилих асимптот $y=kx+b$, ця функція не має: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$.

5. Знаходимо інтервали зростання, спадання функції і разом з тим можливий її екстремум:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2 - 1} \right)' = \frac{2x(x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2} \text{ і } y' = 0.$$

$f'(x < 0) > 0 \rightarrow$ функція зростає, $f'(x > 0) < 0$ – функція спадає.

У точці $x=0$ – екстремум функції, а саме максимум: $f(0)=0$.

6. Тепер досліджуємо функцію на перегин. Маємо:

$$y'' = \left(-\frac{2x}{(x^2 - 1)^2} \right)' = \frac{-2(x^2 - 1)^2 + 2x(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3} \neq 0.$$

Точок перегину немає. Побудуємо графік функції (рис. 18):

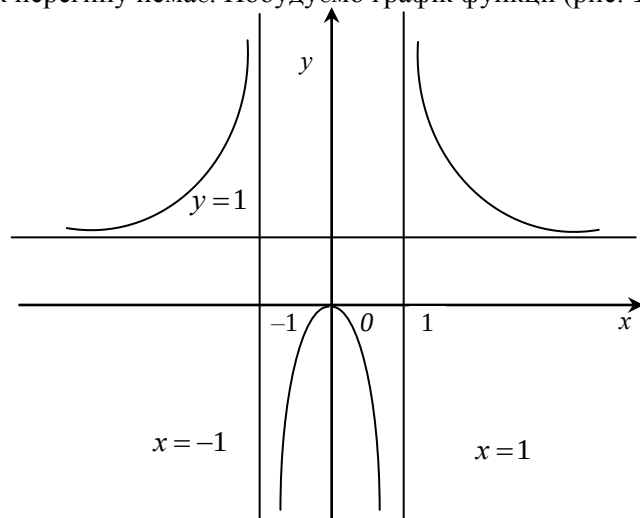


Рис. 18

Диференціал функції

Диференціалом функції $y = f(x)$ називається добуток її похідної на приріст незалежної змінної:
 $dy = f'(x)\Delta x$ або $dy = f'(x)dx$,

оскільки $\Delta x = dx$. Із другої формули випливає, що $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

При достатньо малих Δx справедлива наближена формула

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x \quad \text{або} \quad f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Завдання для самостійної роботи

1. За правилом Лопітала обчислити границі

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\ln x}$.

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-0,01x}$.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$.

2. Знайти інтервали зростання, спадання функції.

- | | |
|----------------------------------|---------------------------|
| 1) $y = \frac{x^2}{x-1}$. | 6) $y = \ln(1+x^2)$ |
| 2) $y = x^4 - 2x^2 - 5$. | 7) $y = \frac{4x}{x^2+4}$ |
| 3) $y = \frac{x^2-6x-16}{x-1}$. | 8) $y = x^3 + 3x^2 + 3x$ |
| 4) $y = \frac{x^2}{x-1}$. | 9) $y = x^3 - 3x + 5$ |
| 5) $y = x^4 - 2x^2 - 5$. | 10) $y = x - \ln(1+x)$ |

3. Знайти асимптоти до графіка функції.

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1) $y = \frac{x^3 + 2x^2}{(x-1)^2}$. | 6) $y = \frac{3x^3}{(x-1)^2}$. |
| 2) $y = \frac{2x^3}{(x+2)^2}$. | 7) $y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}$. |
| 3) $y = \frac{x^3}{3-x^2}$. | 8) $y = \frac{(x-2)^2}{x+1}$. |
| 4) $y = \frac{2x}{(x+1)(x-2)}$. | 9) $y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$. |
| 5) $y = \frac{x^2}{x-1}$. | 10) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$. |

4. Визначити інтервали опуклості і вгнутості функції.

- | | |
|-------------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $y = \frac{x^4 + 8}{x^3 + 1}$. | 6) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ |
| 2) $y = \ln(1+x^3)$. | 7) $y = \frac{4-2x}{1-x^2}$ |
| 3) $y = \frac{2x^2 - x}{(x-1)^2}$. | 8) $y = \frac{5x}{4-x^2}$ |
| 4) $y = \frac{x^2 + 6}{x^2 + 1}$. | 9) $y = \frac{x^2}{4x^2 - 1}$ |
| 5) $y = \ln(1+x^2)$. | 10) $y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}$ |

5. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік.

- | | |
|---|-----------------------------------|
| 1) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$. | 2) $y = \frac{4x - x^2 - 4}{x}$. |
| 3) $y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}$. | 4) $y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$. |
| 5) $y = \frac{x}{9-x}$. | 6) $y = \frac{x^2}{4x^2 - 1}$. |
| 7) $y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}$. | 8) $y = \frac{(x-2)^2}{x+1}$. |
| 9) $y = \frac{x^2 + 6}{x^2 + 1}$. | 10) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$. |

Розділ 4. Функція багатьох змінних

Тема 8. Функція двох незалежних змінних. Екстремум функцій двох змінних

Методичні поради до вивчення теми

Слід розглянути теоретичний матеріал з наступних питань теми: функція багатьох змінних, область визначення, множина значень, способи задання функції, диференційованість функції двох змінних, диференціювання складної функції, частинні похідні і повні диференціали вищих порядків.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Нехай задано функцію $z = f(x, y)$. Якщо вважати одну зі змінних, наприклад y , фіксованою, то функцію f можна рахувати як функцію тільки від змінної x і знайти похідну функції f від x , позначивши її $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Нехай $z = f(x, y)$. Тоді

1. Частинна похідна функції f по змінній x є функція

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (1)$$

при цьому $\frac{\partial f}{\partial x}$ визначена в кожній точці (x, y) області визначення функції f , для яких існує границя (1).

2. Частинна похідна функції f по змінній y є функція

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}, \quad (2)$$

при цьому $\frac{\partial f}{\partial y}$ визначена в кожній точці (x, y) області визначення функції f , для яких існує границя (2).

Зауважимо, що при знаходженні частинної похідної по одній змінній, усі інші аргументи слід вважати постійними величинами.

Наприклад, якщо $z = f(x, y)$, то для знаходження $\frac{\partial f}{\partial x}$ вважаємо, що y – постійна величина і диференціюємо функцію тільки по x . Для знаходження $\frac{\partial f}{\partial y}$ вважаємо, що x – постійна величина і диференціюємо функцію тільки по y .

Існують і інші позначення для частинних похідних.

Якщо $z = f(x, y)$, тоді

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)) \text{ та } \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y)). \quad (3)$$

Частинні похідні першого порядку, обчислені в точці (a, b) , позначаються як

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a, b)} \text{ та } \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(a, b)} \quad (4)$$

Частинні похідні функції $z = f(x, y)$ мають просту геометричну інтерпретацію, а саме: похідна $\frac{\partial f}{\partial x}$ або $\frac{\partial f}{\partial y}$ чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до кривої лінії, яка утворюється перетином поверхні $z = f(x, y)$ площиною $y = y_0$ або $x = x_0$.

Частинні похідні вищих порядків

Відомо, що коли $y = f(x)$, то $y' = \frac{df}{dx}$ і $y'' = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right)$, тобто друга похідна функції f є похідна від першої похідної функції f .

Аналогічно, коли $z = f(x, y)$, можна продиференціювати кожну з двох «перших» частинних похідних $\frac{\partial f}{\partial x}$ та $\frac{\partial f}{\partial y}$ по обох змінних x та по y , і одержати чотири частинних похідних другого порядку, а саме:

1. Диференціюючи двічі по змінній x :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right). \quad (5)$$

2. Диференціюючи двічі по змінній y отримаємо:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right). \quad (9)$$

3. Диференціюючи спочатку по змінній x , далі по змінній y , отримуємо:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right). \quad (10)$$

4. Диференціюючи спочатку по змінній y , далі по змінній x , маємо:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right). \quad (11)$$

Похідні $\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$ та $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$ називають змішаними частинними похідними другого порядку.

Наприклад, нехай $z = f(x, y) = x^3 y^3 - xy^5$. Обчислити частинні похідні другого порядку.

Розв'язання. Маємо $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^3 - y^5$ і $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 y - 5xy^4$.

Тоді $\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 y^3 - y^5) = 6xy^3$;

$$\frac{d^2 f}{dy^2} = \frac{\partial}{\partial y} (2x^3 y - 5xy^4) = 2x^3 - 20xy^3;$$

$$\frac{d^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 y^3 - y^5) = 6x^2 y^2 - 5y^4;$$

$$\frac{d^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (2x^3 y - 5xy^4) = 6x^2 y - 5y^4.$$

Із розв'язання помітно, що $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Теорема. Якщо f, f'_x, f'_y, f''_{xy} і f''_{yx} неперервна в точці $(x_0; y_0)$, тоді $f''_{xy}(x_0; y_0) = f''_{yx}(x_0; y_0)$.

Тобто змішана частинна похідна другого порядку не залежить від порядку диференціювання функцій.

Повний диференціал функцій двох змінних

Для функції від однієї змінної $y = f(x)$ диференціал функції визначається як $dy = f'(x)dx$.

Якщо для функції $z = f(x, y)$ існують частинні похідні першого порядку і вона неперервна в деякій області D , то повний диференціал функції двох змінних знаходять за формулою (12):

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (12)$$

Завдання для самостійної роботи

1. Дано функцію двох змінних $z = f(x, y)$. Обчислити частинні похідні другого порядку.

$$1) z = f(x, y) = 3x + y - xy + 6 \quad 2) z = f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$$

$$3) z = f(x, y) = 2xy - 2x^2 - 4y^2 \quad 4) z = f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$$

$$5) z = f(x, y) = 5x^2 - 3xy + y^2$$

2. Дано функцію двох змінних $z = f(x, y)$. Довести, що $\frac{d^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{d^2 f}{\partial y \partial x}$.

$$1) z = \ln(3xy - 4);$$

$$2) z = \sin(x^2 - y);$$

$$3) z = \cos(3x^2 - y^3); \quad 4) z = e^{x^2 - y^2}; \quad 5) z = \cos(xy^2)$$

3. Знайти екстремум функції двох змінних, та значення функції в точках екстремуму.

$$1. Z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20; \quad 2. Z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1;$$

$$3. Z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2; \quad 4. Z = (x-1)^2 + 2y^2;$$

$$5. Z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2; \quad 6. Z = x^3 + y^3 - 3xy;$$

Розділ 5. Інтегральне числення функції однієї змінної.

Тема 9. Невизначений інтеграл та визначений інтеграл.

Методичні поради до вивчення теми

Слід розглянути теоретичний матеріал з наступних питань теми: поняття первісної; невизначений інтеграл; властивості невизначеного інтегралу; таблиця основних інтегралів; безпосереднє інтегрування; метод інтегрування частинами; метод підстановки; інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен; інтегрування раціональних дробів; інтегрування тригонометричних функцій.

Термінологічний словник ключових понять

Інтегрування функцій – знаходження первісних функцій.

Інтегрування розкладом – метод інтегрування за формулою:

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

Інтегрування частинами – метод інтегрування за формулою $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v du$.

Метод підстановки – метод інтегрування за формулами:

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \\ t = \varphi^{-1}(x) \end{array} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = |\varphi(x) = t| = \int f(t)dt$$

Первісною функцією для функції $f(x)$ називається така функція $F(x)$, похідна якої дорівнює даній функції, тобто $F'(x) = f(x)$.

Невизначеним інтегралом від неперервної функції $f(x)$ або від диференціального виразу $f(x)dx$ називається сукупність усіх первісних функцій $f(x)$: $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $F'(x) = f(x)$.

Функція $f(x)$ називається підінтегральною функцією, а $f(x)dx$ – підінтегральним виразом.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Безпосереднє інтегрування

Обчислення інтегралів із використанням основних властивостей невизначених інтегралів і таблиць найпростіших інтегралів називається безпосереднім інтегруванням.

Приклад 24. Знайти

$$\int (3x^2 - 2\sin x + 5)dx = \frac{3x^3}{3} + 2\cos x + 5x + C = x^3 + 2\cos x + 5x + C.$$

Метод підстановки

Заміна змінної інтегрування, що призводить до зведення невизначеного інтеграла до табличного називається методом підстановки або методом заміни змінної. Можна використовувати підстановку двох видів:

1) змінна інтегрування x замінюється функцією змінної t : $x = \varphi(t)$; $dx = \varphi'(t)dt$.

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

2) нова змінна t вводиться як функція змінної інтегрування x : $t = \varphi(x)$, $dt = \varphi'(x)dx$.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt.$$

Приклад 25. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 25}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 25} = \left[\begin{array}{ll} x^3 = t & 3x^2 dx = dt \\ x^6 + 25 = t^2 + 25 & x^2 dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 25} = \frac{1}{15} \operatorname{arctg} \frac{t}{5} + C = \frac{1}{15} \operatorname{arctg} \frac{x^3}{5} + C.$$

Інтегрування за частинами

Інтегрування за частинами виконується за формулою:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

В інтегралах виду $\int P(x) \cdot e^x dx$; $\int P(x) \cdot \sin x dx$; $\int P(x) \cdot \cos x dx$; доцільно обирати $u = P(x)$, а залишену частину підінтегрального виразу позначити dv .

В інтегралах виду $\int P(x) \cdot \ln x dx$; $\int P(x) \cdot \arcsin x dx$; $\int P(x) \cdot \operatorname{arctg} x dx$; доцільно брати $dv = P(x) dx$, а залишок підінтегрального виразу дорівнюватиме u .

Приклад 26. Знайти інтеграл $\int x \cdot e^{8x} dx$.

Розв'язання.

$$\int x e^{8x} dx = \left[\begin{array}{ll} \int u dv = uv - \int v du \\ x = u & dx = du \\ e^{8x} dx = dv & v = \frac{1}{8} e^{8x} \end{array} \right] = \frac{x}{8} e^{8x} - \frac{1}{8} \int e^{8x} dx = \frac{x}{8} e^{8x} - \frac{1}{64} e^{8x} + C.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити інтеграл методом безпосереднього інтегрування:

$$\begin{array}{lll} 1) \int \left(\frac{3x^2 + 1}{x^5} \right) dx. & 2) \int \frac{4}{\sqrt{x^2 + 9}} dx. & 3) \int \left(\frac{1}{\sqrt{x^7}} + \cos x \right) dx \\ 4) \int \frac{6x^6 - 3x^4 - 5}{7x^3} dx. & 5) \int \frac{6x^6 - 3x^4 - 5}{3x^4} dx. & 6) \int \left(2x^7 - \frac{4}{\sqrt[3]{x}} + 2^x - 3 \right) dx. \end{array}$$

2. Обчислити інтеграл методом інтегрування за частинами:

$$\begin{array}{lll} 1) \int x \sin 5x dx. & 2) \int x e^{-2x} dx. & 3) \int x \ln x dx. \\ 4) \int x \operatorname{arctg} 2x dx. & 5) \int (x+1) \cos x dx. & 6) \int 2x \operatorname{arctg} 3x dx. \end{array}$$

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Інтегрування функцій, що містять квадратний тричлен

Розглянемо інтеграли виду (1) $\int \frac{Ax + B}{x^2 + bx + c} dx$ та (2) $\int \frac{Ax + B}{\sqrt{x^2 + bx + c}} dx$.

Інтеграл виду (1) зводиться до табличних:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C; \\ \text{б) } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C; \\ \text{в) } \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C. \end{array}$$

Інтеграл виду (2) зводиться до табличних:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C; \\ \text{б) } \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C; \end{array}$$

$$в) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C.$$

Інтегрування раціональних функцій

Раціональною функцією $R(x)$ називається функція, яка дорівнює відношенню двох многочленів:

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n},$$

де m, n – цілі додатні числа; $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ – довільні дійсні числа.

Якщо $m < n$, то $R(x)$ називають правильним дробом, якщо $m \geq n$ – неправильним дробом.

Шляхом ділення чисельника на знаменник можна представити у вигляді суми деякого многочлена та правильного дробу:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = M_{m-n}(x) + \frac{Q_l(x)}{P_n(x)},$$

де $M_{m-n}(x)$, $Q_l(x)$ – многочлени; $\frac{Q_l(x)}{P_n(x)}$ – правильний дріб.

Для того, щоб проінтегрувати правильний раціональний дріб, необхідно скористатись теоремою про розклад правильних раціональних дробів на суму простіших від даних.

Простим дробом називається дріб одного із наступних видів:

$$1) \frac{A}{x-a}; 2) \frac{A_k}{(x-a)^k}; 3) \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; 4) \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},$$

де A, a, M, N, p, q – сталі числа;

k – ціле число, $k \geq 2$, $p^2 - 4q < 0$.

Для обчислення A, M, N використовують метод невизначених коефіцієнтів або метод часткових значень.

Інтегрування тригонометричних виразів

Інтеграли виду $\int \sin ax \sin bxdx$, $\int \cos ax \cos bxdx$, $\int \sin ax \cos bxdx$ знаходять за допомогою тригонометричних формул:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta));$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

Інтеграли виду $\int \sin^m x \cos^n x dx$

1. Якщо m, n – парні числа, знаходять за допомогою формул:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x);$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x);$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

2. Якщо хоча б одне із чисел m або n непарне, то від непарної степені відокремлюється множник і вводиться нова змінна, якщо $n = 2k + 1$, то

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx &= \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x dx = \\ &= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k d(\sin x) = \int t^m (1 - t^2)^k dt. \end{aligned}$$

3. Якщо m і n – цілі парні, але одне із них від'ємне, то можна використати підстановку $\operatorname{tg} x = t$.

4. Інтеграли від степені однієї тригонометричної функції:

$$\int \sin^m x dx, \int \cos^m x dx, \int \operatorname{tg}^m x dx, \int \operatorname{ctg}^m x dx.$$

Знаходять інтегруванням за частинами або через заміну змінної.

Інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x) dx$, де R – раціональна функція, розв'язують за допомогою підстановки: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, при цьому

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Якщо $R(\sin x, \cos x)$ є непарною функцією відносно $\sin x$ або $\cos x$, то можна скористатися підстановкою $t = \cos x$ або $t = \sin x$.

Якщо $R(\sin x, \cos x)$ парна функція відносно $\sin x$ або $\cos x$ одночасно, то інтеграл зводиться до інтеграла від раціональної функції за допомогою підстановки $\operatorname{tg} x = t$.

Визначений інтеграл

Нехай на відрізку $[a; b]$ задана невід'ємна функція $y = f(x)$. Знайдемо площу S криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ та віссю абсцис $y = 0$ (рис. 19).

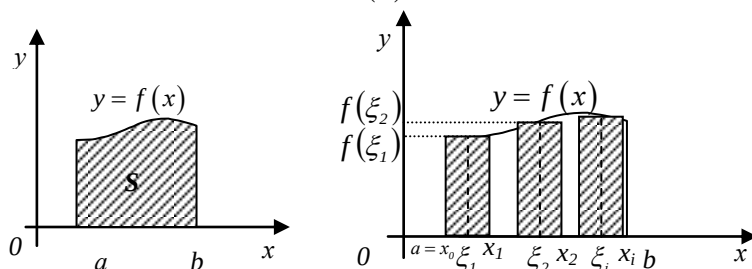


Рис. 19

Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n елементарних відрізків точками $x_0, x_1, \dots, x_n$, де $x_0 = a$, $x_n = b$ (рис. 19). Довжина кожного відрізка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. На кожному інтервалі $(x_{i-1}; x_i)$ виберемо точку ξ_i . Площа довільного прямокутника S_i дорівнює $f(\xi_i) \Delta x_i$. Знайдемо суму площ усіх таких прямокутників.

Сума виду $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ називається інтегральною сумою для функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

Визначеним інтегралом від функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ називається границя її інтегральної суми у випадку, коли число елементарних відрізків необмежено зростає, а довжина найбільшого з них прямує до нуля:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

де $\lambda = \max \Delta x_i$ – довжина найбільшого з елементарних відрізків.

Число a називають нижньою границею інтеграла, число b – верхньою границею.

Геометричний зміст визначеного інтеграла. Якщо функція $y = f(x)$ невід'ємна на відрізку $[a; b]$, $\int_a^b f(x) dx$ чисельно дорівнює площі S під кривою $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ (рис. 19).

Приклад 27. Обчислити $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}$.

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}} = \left| \begin{array}{l} 1+\sqrt{2x+1}=t, \quad dx=(t-1)dt; \\ x=\frac{(t-1)^2}{2}, \quad \begin{array}{ccc} x & 0 & 4 \\ t & 2 & 4 \end{array} \end{array} \right| = \int_2^4 \frac{t-1}{t} dt =$$

$$= \int_2^4 \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = \left(t - \ln|t|\right) \Big|_2^4 = 4 - \ln 4 - (2 - \ln 2) = 2 - \ln 2.$$

Приклад 28. Обчислити $\int_1^e x \ln x dx$.

$$\int_1^e x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e \frac{x^2 dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^e =$$

$$= \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} \left(\ln e - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\ln 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

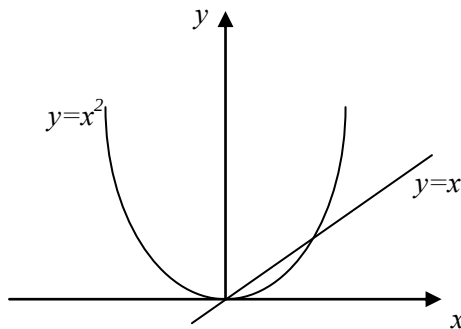
Формула Ньютона-Лейбніца

Визначений інтеграл від неперервної функції на даному проміжку дорівнює різниці значень довільної первісної цієї функції для верхньої і нижньої границь інтегрування:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \text{ де } F'(x) = f(x).$$

Приклад 29. Знайти площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = x^2$ і $y = x$.

Розв'язання. Відомо, що $\int_a^b f(x) dx = S$.



Межі інтегрування $a=0$ і $b=1$ оскільки система $\begin{cases} y=x \\ y=x^2 \end{cases}$ дає $x=x^2$, звідки $x_1=0$ і $x_2=1$; ($a=x_1$; $b=x_2$).

З рисунка видно, що $S = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ кв. од.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити інтеграли:

$$1) \int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx. \quad 2) \int \frac{2x-1}{3x^2-2x+6} dx. \quad 3) \int \frac{dx}{3x^2-6x+1}.$$

$$4) \int \frac{dx}{x^2+2x+2}. \quad 5) \int \frac{dx}{2x^2+x+2}. \quad 6) \int \frac{dx}{2x^2-11x+2}.$$

2. Знайти площу фігури обмеженої заданими лініями.

1) $y = x^2$, $y = x+1$.

$$2) y = x^2, \quad x = -2 + x^2$$

Розділ 6. Диференціальні рівняння.

Тема 10. Диференціальні рівняння I-го порядку. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Слід розглянути теоретичний матеріал з наступних питань теми: диференціальні рівняння, розв'язок диференціальних рівнянь; диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними; однорідні диференціальні рівняння; лінійні диференціальні рівняння; рівняння, що допускають зниження порядку.

Термінологічний словник ключових понять

Задача Коші – задача пошуку розв'язку із заданими початковими умовами.

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними – рівняння, в якому можна відокремити змінні.

Однорідні диференціальні рівняння – рівняння першого порядку з однорідною правою частиною.

Диференціальні рівняння у повних диференціалах – диференціальні рівняння, що визначаються повним диференціалом деякої функції.

Лінійні диференціальні рівняння – рівняння лінійно залежить від невідомої функції і її похідної.

Диференціальним рівнянням першого порядку називається співвідношення виду $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$.

$$(1)$$

де x – незалежна змінна;

$y = y(x)$ – невідома функція аргументу x ;

$F(x, y, y')$ – задана функція змінних $x, y, y' = \frac{dy}{dx}$.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Рівняння (1) не визначене відносно похідної, а рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (2)$$

де $f(x, y)$ – задана функція двох змінних, називається диференціальним рівнянням першого порядку, визначеним відносно похідної. Часто зустрічається і такий запис диференціального рівняння першого порядку:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

де $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – задані функції змінних x і y .

Співвідношення $\Phi(x, y) = 0$ називається розв'язком рівняння (2) у неявній формі (або інтегралом рівняння (2)), якщо воно визначає y як функцію від x : $y = \varphi(x)$, яка є розв'язком рівняння (2).

Задача про знаходження розв'язку $y = \varphi(x)$ рівняння (2), що задовольняє початкову умову $\varphi(x_0) = y_0$, називається задачею Коші.

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння виду
$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad (3)$$

називається рівнянням з відокремлюваними змінними.

Якщо в точці $y = c_0$, $g(c_0) = 0$, то функція $y = c_0$ є розв'язком рівняння (3). Розв'язки рівняння (3), уздовж яких $g(y) \neq 0$, задовольняють співвідношення

$$\int \frac{dy}{g(y)} - \int f(x) dx = C.$$

(4)

Теорема. Нехай функції $f(x)$ і $g(y)$ визначені і неперервно диференційовані в околі точок $x = x_0$, $y = y_0$ відповідно, причому $g(y_0) \neq 0$. Тоді розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (3) з початковою умовою $\varphi(x_0) = y_0$ існує в деякому околі точки $x = x_0$ єдиний і задовольняє співвідношення:

$$\int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^x f(x) dx. \quad (5)$$

Рівняння виду $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними заміною $ax + by + c = z$.

Приклад 30. Розв'язати рівняння $x(1 + y^2) + y(1 + x^2) \frac{dy}{dx} = 0$.

Розв'язання. Для цього необхідно представити рівняння у вигляді $x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0$. Поділивши обидві частини цього рівняння на добуток $(1 + x^2)(1 + y^2)$, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними: $\frac{x}{1 + x^2}dx + \frac{y}{1 + y^2}dy = 0$.

Інтегруючи це рівняння, отримаємо: $\int \frac{x}{1 + x^2}dx + \int \frac{y}{1 + y^2}dy = C_1$

$$\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \frac{1}{2} \ln(1 + y^2) = \frac{1}{2} \ln C \left(\frac{1}{2} \ln C = C_1 \right).$$

Звідси $(1 + x^2)(1 + y^2) = C$.

1) Розв'язати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y^2 dx + (x + 1) dy = 0.$$

$$(y^2 + 1) dx + xy dy = 0.$$

$$(x + 1) dy - (y - 2) dx = 0.$$

$$(1 + y^2) dx + (x^2 + 1) dy = 0.$$

$$\sqrt{1 - y^2} dx + \sqrt{1 - x^2} dy = 0.$$

$$(1 + y) dx + (x + 1) dy = 0.$$

$$y dx - (1 - 2x) dy = 0.$$

$$2y dx - (2x + 6) dy = 0.$$

$$xy \cdot \frac{dy}{dx} = 1 - x^2.$$

$$\sqrt{y} dx + x^2 dy = 0.$$

Лінійні рівняння першого порядку

$$\text{Рівняння виду } \frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x) \quad (6)$$

називається лінійним. Є декілька методів розв'язування цього рівняння.

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)

Щоб розв'язати рівняння (6), треба спочатку розв'язати відповідне однорідне рівняння (це робиться шляхом відокремлення змінних):

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = 0. \quad (7)$$

Його загальний розв'язок має вигляд: $y = Ce^{-\int a(x)dx}$.

Далі необхідно довільну сталу C замінити на невідому функцію $C(x)$, потім вираз, отриманий для y , підставити в рівняння (6) і знайти функцію $C(x)$. В результаті знайдену функцію $C(x)$ необхідно підставити замість C в загальний розв'язок однорідного рівняння.

Метод Бернуллі

Необхідно шукати розв'язок функції у вигляді $y = u(x) \cdot v(x)$. Оскільки $y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$, і $y' = \frac{dy}{dx}$, рівняння набуває вигляду:

$$u'v + uv' + a(x) \cdot uv = b(x) \\ \text{або } [u' + a(x)u] \cdot v + uv' = b(x).$$

Оберемо за $u(x)$ один із розв'язків рівняння $u' + a(x) \cdot u = 0$, $\Rightarrow \frac{du}{u} = -a(x) \cdot u$, $\Rightarrow \int \frac{du}{u} = -\int a(x) dx$, $\Rightarrow \ln u(x) = -\int a(x) dx$, $\Rightarrow u(x) = e^{-\int a(x) dx}$. Тоді $v(x)$ знаходимо із рівняння $e^{-\int a(x) dx} \frac{dv}{dx} = b(x)$, тобто $v(x) = C + \int b(x) e^{\int a(x) dx} dx$.

У результаті загальний розв'язок рівняння має такий вигляд:

$$y = e^{-\int a(x) dx} \left[C + \int b(x) \cdot e^{\int a(x) dx} dx \right].$$

Деякі рівняння стають лінійними, якщо x вважати функцією, а y – аргументом. Так, нелінійне рівняння $A(y) + B(y) \cdot x - C(y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ розв'язується аналогічно до рівняння (6), якщо його представити у вигляді

$$\frac{dx}{dy} + \varphi(y) \cdot x = f(y).$$

Для того, щоб розв'язати рівняння Бернуллі, тобто рівняння

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x) \cdot y^n \quad (n \neq 0, 1),$$

яке можна записати у вигляді $y^{-n} \frac{dy}{dx} + a(x) \cdot y^{1-n} = b(x)$, $y \neq 0$, необхідно зробити заміну $z = y^{1-n}$, яка зведе його до лінійного, і розв'язати викладеним вище способом. Проте розв'язки рівняння Бернуллі зручно шукати у вигляді $y = u(x) \cdot v(x)$, не зводячи його до лінійного.

Приклад 31. Розв'язати рівняння $x \frac{dy}{dx} - 2y = 2x^4$.

Розв'язання. Шукаємо розв'язок цього рівняння у вигляді добутку двох функцій $y = u(x) \cdot v(x)$. Маємо:

$$x \frac{du}{dx} v + x u \frac{dv}{dx} - 2uv = 2x^4; \quad x \frac{du}{dx} v + u \left[x \cdot \frac{dv}{dx} - 2v \right] = 2x^4.$$

Виберемо функцію $v(x)$ так, щоб $x \cdot \frac{dv}{dx} - 2v = 0$. Розділивши змінні та проінтегрувавши отримане, отримаємо

$$\int \frac{dv}{v} = 2 \int \frac{dx}{x}; \quad \ln|v| = 2 \ln|x|, \Rightarrow v = x^2.$$

Функцію $u(x)$ знайдемо із рівняння: $x^3 \frac{du}{dx} = 2x^4$, $\int du = 2 \int x dx \Rightarrow u = x^2 + C$. Оскільки $y = u \cdot v$, то загальним розв'язком початкового рівняння буде $y = Cx^2 + x^4$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

1) $y' = \frac{x^2 + 9}{y^2 + 1}$, $y(0) = 1$

6) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $y(1) = 1$.

2) $y' = \frac{y}{x^2 + 1}$, $y(0) = 1$.

7) $\frac{dy}{dx} = x^2 + 3x$, $y(1) = 5$.

3) $y' + 2y = 4e^{-2x}$, $y(1) = 1$.

8) $y' + 5y = e^{-2x}$, $y(1) = 1$.

$$4) (1+y^2)dx - xydy = 0, \quad y(1) = 0. \quad 9) y' = 2 - \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1.$$

$$5) xy' - y = x, \quad y(1) = 2. \quad 10) y' = 1 + \frac{y}{x}, \quad y(0) = 1.$$

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння і частинний розв'язок, що задовольняє початкові умови: $y = y_0$ при $x_0 = 0$; $y' = y'_0$.

1. $y'' + 4y' + 4y = 2e^x$; $y(0) = -2$, $y'(0) = -2$.
2. $y'' - 5y' + 6y = 2\cos x$; $y(0) = 3$, $y'(0) = \frac{1}{2}$.
3. $y'' - 2y' + 5y = x^2 + 1$; $y(0) = -3$, $y'(0) = -\frac{1}{5}$.
4. $y'' + 2y' - 8y = 3\sin x$; $y(0) = -1$, $y'(0) = -\frac{3}{2}$.
5. $y'' - 6y' + 9y = \cos 2x$; $y(0) = 2$, $y'(0) = \frac{1}{3}$.
6. $y'' - 4y' + 5y = 2e^{3x}$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -\frac{3}{4}$.
7. $y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x}$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.
8. $y'' - 4y' + 4y = -x^2 + 3x$; $y(0) = 3$, $y'(0) = -\frac{4}{3}$.
9. $y'' + 2y' + 10y = -\sin 2x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{3}{4}$.
10. $y'' + y' - 6y = x^2 - 1$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Розділ 7. Ряди

Тема 11. Числові ряди. Степеневі ряди

Методичні поради до вивчення теми

Слід розглянути теоретичний матеріал з наступних питань теми: основні поняття числових рядів; властивості збіжних рядів (теореми); ряд геометричної прогресії; ознаки збіжності знакододаєтних рядів; знакозмінні ряди, абсолютна та умовна збіжність; знакопереривні ряди, ознака Лейбніца.

Термінологічний словник ключових понять

Означення. *Рядом* називається сума нескінченної множини доданків

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots, \quad (1)$$

які є членами нескінченної послідовності $\{u_n\}$.

Символи $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ називаються **членами ряду**. Вони можуть бути числами, функціями, матрицями і так далі, а відповідні ряди називаються числовими, функціональними, матричними і т. д.

Скорочено ряд позначають так: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Індекс, що стоїть біля кожного члена ряду, вказує його порядковий номер в ряді.

Член u_n , номер якого не зафіксований, називається **загальним членом ряду**.

$$\text{Сума перших } n \text{ членів ряду} \quad S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \quad (2)$$

називається частинною сумою ряду.

Оскільки ряд складається з нескінченної множини доданків, то послідовним їх додаванням суму ряду знайти не можна. Тому потрібно спеціально дати означення суми ряду.

Означення. Якщо в частинній сумі S_n збільшувати число доданків, то може зустрітися один із таких трьох випадків:

1. При необмеженому зростанні доданків частинна сума прямує до конкретної границі, яку ми позначимо буквою S : $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. В цьому випадку **ряд називається збіжним**, а число S приймається за суму ряду.

2. При необмеженому зростанні числа доданків у частинній сумі її границя прямує до $+\infty$ або $-\infty$. В цьому випадку **ряд називається розбіжним**. Розбіжний ряд суми не має.

3. При необмеженому зростанні числа доданків у частинній сумі $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не існує. Такий ряд називають **розбіжним**.

Отже, за суму ряду приймають $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Основні властивості ряду

1. Якщо всі члени ряду (1) помножити на одне і те ж число $k \neq 0$, то ряд $ku_1 + ku_2 + ku_3 + \dots + ku_n + \dots = kS$ буде збіжним, якщо ряд (1) збіжний, і буде розбіжним, якщо ряд (1) розбіжний.

2. Якщо ряди $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ (3)

$$\text{і } g_1 + g_2 + g_3 + \dots + g_n + \dots \quad (4)$$

збіжні, то ряд, одержаний від почленного додавання або віднімання відповідних членів цих рядів, буде також збіжним. Його сума буде рівною $S_1 \pm S_2$, де S_1 – сума ряду (3), а S_2 – сума ряду (4).

3. Сума збіжного і розбіжного рядів є ряд розбіжний.

4. Сума двох розбіжних рядів може бути як збіжним, так і розбіжним рядом.

5. Добуток абсолютно збіжних рядів знаходять за такою формулою:

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots)(g_1 + g_2 + g_3 + \dots + g_n + \dots) = u_1 g_1 + (u_1 g_2 + u_2 g_1) + \\ + (u_1 g_3 + u_2 g_2 + u_3 g_1) + \dots + (u_1 g_n + u_2 g_{n-1} + u_3 g_{n-2} + \dots + u_n g_1) + \dots$$

Достатні ознаки збіжності числових рядів з невід'ємними членами. Перша ознака порівняння рядів

Нехай задано два ряди з невід'ємними членами:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots, \quad u_n \geq 0; \quad (5)$$

$$g_1 + g_2 + g_3 + \dots + g_n + \dots, \quad g_n \geq 0. \quad (6)$$

Якщо $u_n \leq g_n$, починаючи з деякого номера n , то із збіжності ряду (6) випливає збіжність ряду (5), а із розбіжності ряду (5) випливає розбіжність ряду (6).

На практиці дуже часто користуються другою ознакою порівняння рядів. Якщо $u_n > 0$ і $g_n > 0$ та існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{g_n} = h$, де h – число, відмінне від нуля, то ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ поведуться себе однаково відносно збіжності (або обидва розбіжні, або обидва збіжні).

Поряд з ознакою порівняння, яка широко застосовується, використовують і інші ознаки. Зупинимося на деяких із них.

Ознака Даламбера

Якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, то при $q < 1$ ряд збіжний, при $q > 1$ – розбіжний, при $q = 1$ ця ознака відповіді не дає.

Ознака Коші (радикальна ознака)

Якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = q$, то при $q < 1$ ряд збіжний, при $q > 1$ – розбіжний, при $q = 1$ ознака відповіді не дає.

Інтегральна ознака Коші. Якщо $f(x)$ – неперервна додатна спадна функція на проміжку $[1; +\infty)$, то ряд $f(1) + f(2) + \dots + f(n) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, і інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ знаходяться однаково відносно збіжності.

Функціональні ряди

Нехай задана послідовність функцій $u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots$, що мають спільну область визначення. Вираз, складений з цих функцій, $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, називається функціональним рядом.

При кожному значенні x_0 із області визначення функціональний ряд перетворюється в числовий ряд. Якщо ряд збіжний у точці x_0 , то x_0 називається точкою збіжності ряду. Множина всіх точок

збіжності функціонального ряду називається областю збіжності ряду. Область збіжності функціонального ряду можна знайти, користуючись ознаками збіжності числових рядів.

Приклад 34. Знайти область збіжності функціонального ряду $e^{-x} + e^{-2x} + \dots + e^{-nx} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$.

Розв'язання. Використаємо радикальну ознаку Коші $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^{-nx}} = e^{-x}$. При $x > 0$ $e^{-x} < 1$. Згідно з ознакою Коші ряд збіжний при $x \in (0; +\infty)$.

При $x = 0$ маємо ряд $1 + 1 + 1 + \dots$ – розбіжний.

При $x < 0$ $e^{-nx} > 1$ – ряд розбіжний.

Означення. Функціональний ряд $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається рівномірно збіжним на інтервалі $(a; b)$, якщо його члени на цьому інтервалі не більші по абсолютній величині відповідних членів збіжного числового ряду з додатними членами.

Ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots, a_n \geq 0$ називається **мажорантою** даного функціонального ряду.

Степеневі ряди

Степеневим рядом називається ряд виду

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n,$$

де a_n – числа, які називаються коефіцієнтами степеневому ряду. При $a = 0$ степеневий ряд має вид

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n.$$

Цей ряд завжди збіжний при $x = 0$. Основна властивість степеневому ряду виражається теоремою Абеля: якщо степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$ збіжний у точці x_0 , то він збіжний і причому абсолютно для всіх x , що задовольняють нерівність $-|x_0| < x < |x_0|$. Якщо ж степеневий ряд розбіжний у точці $x = x_0$, то він розбіжний для всіх значень x , для яких $|x| > |x_0|$. Із теореми Абеля випливає, що існує інтервал

$-R < x < R$, для всіх точок якого ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$ збіжний, а при $|x| > R$ – розбіжний. Цей інтервал називають інтервалом збіжності, а число R називають радіусом збіжності степеневому ряду. На кінцях інтервалу ($x = \pm R$) степеневий ряд досліджують окремо. Якщо $R = 0$, то степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$ збігається лише в точці $x = 0$. Якщо $R = \infty$, то ряд збігається на всій допустимій області. Всі

властивості ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$ справедливі і для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$. Для відшукування інтервалу збіжності степеневому ряду можна використовувати достатні ознаки збіжності числових рядів. Використовуючи їх, члени ряду беруть по абсолютній величині. Слід відмітити таку важливу властивість ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$: цей ряд можна скільки завгодно раз інтегрувати і диференціювати в кожній

точці $x \in (-R; R)$. Радіус збіжності можна знаходити за формулами: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Дослідити на збіжність функціональний ряд – означає знайти інтервал збіжності та дослідити його на кінцях інтервалу.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Приклад 35. Знайти область збіжності степеневому ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n^2+1} = \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{5} + \frac{3x^3}{10} + \dots + \frac{nx^n}{n^2+1} + \dots$$

Розв'язання. Знаходимо радіус збіжності цього ряду за формулою:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \text{ де } a_n = \frac{n}{n^2+1} \text{ і } a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2+1},$$

маємо: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n((n+1)^2 + 1)}{(n^2 + 1) \cdot (n+1)} \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3} = 1.$

Отже, ряд збігається при всіх $x \in (-1; 1)$. Досліджуємо збіжність ряду на кінцях цього інтервалу; при $x=1$ одержуємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1} \approx \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \dots + \frac{n}{n^2 + 1} + \dots$$

Відомо, що гармонічний ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ є розбіжним.

$\frac{n}{n^2 + 1} \geq \frac{n}{n^2 + n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ за ознакою порівняння рядів і ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$ не має кінцевої суми, він також є розбіжним рядом. Далі, при $x = -1$ маємо знакозмінний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^n}{n^2 + 1} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{3}{10} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 1} + \dots$$

Цей ряд такий, що $\frac{1}{2} > \frac{2}{5} > \frac{3}{10} > \dots$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} = 0.$

І тому, згідно з теоремою Лейбніца, такий ряд збігається, він має конкретну і кінцеву суму ($S = \text{const}$). Отже, досліджуваний степеневий ряд збігається при $x \in [-1; 1)$.

Завдання для самостійної роботи

У завданнях необхідно:

- а) дослідити числовий ряд на абсолютну збіжність;
- б) знайти область збіжності степеневого ряду.

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{3^n(n-2)} (x-1)^n.$

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 2} (x+1)^n.$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+4)}.$

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (2)^{n+1} (x+2)^n.$

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^{n-1}}.$

Модуль 3. Теорія ймовірностей та математична статистика

Розділ 8. Теорія ймовірностей та математична статистика

Тема 12. Основні поняття теорії ймовірностей. Класичне означення ймовірності та елементи комбінаторного аналізу. Статистичне та геометричне означення ймовірності

Подія – всякий факт, який в результаті випробування може відбутися або не відбутися.

– **Несумісними називають події**, якщо поява однієї з них виключає появу інших подій в одному і тому ж випробуванні.

– **Сумісними називаються події**, якщо поява однієї з них не виключає можливості появи інших (не обов'язково одночасно).

– **Протилежними** називаються дві несумісні події, які утворюють повну групу подій.

– **Елементарним наслідком** називають кожен із можливих результатів випробування.

– **Ймовірністю події A** називають відношення числа елементарних наслідків, які сприяють появі події A , до загального числа усіх єдиноможливих та рівноможливих елементарних наслідків:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

де: m – число елементарних наслідків, що сприяють події A ;

n – число усіх єдиноможливих та рівноможливих наслідків.

– **Ймовірність випадкової події** є додатне число, що лежить між нулем і одиницею: $0 < P(A) < 1$.

– **Ймовірність неможливої події** дорівнює нулю: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$.

– **Ймовірність достовірної події** дорівнює одиниці: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$.

Література: [1]: Розділ 1, параграфи 1.3, 1.4;

Методичні рекомендації щодо розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Кинуто два гральних кубика. Знайти ймовірність того, що сума випавши очок дорівнює трьом (подія A).

Розв'язування. Події A сприяє два наслідки: (1; 2), (2; 1) (в дужках вказані числа випавши очок). Загальна кількість рівноможливих наслідків дорівнює $6 \cdot 6 = 36$ (кожне число очок, що випало на одному кубіку, може сполучатися з усіма числами очок, які випали на другому кубіку). Тому

шукана ймовірність $P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Приклад 2. Із 15 студентів, серед яких 5 відмінників, навмання відібрано 5 студентів. Яка ймовірність того, що серед них буде 2 відмінника?

Розв'язування. Загальна кількість можливих елементарних наслідків випробування дорівнює числу способів, якими можна вибрати 5 студентів із 15, тобто C_{15}^5 - числу сполучень із 15 елементів по 5. Сприятливим наслідкам відповідають сполуки, що складаються із двох відмінників (їх можна обрати C_5^2 способами) та трьох не відмінників (можна вибрати C_{10}^3 способами). Значить, число сприятливих даній події наслідків дорівнює $C_5^2 \cdot C_{10}^3$, а шукана ймовірність

$$p = \frac{C_5^2 \cdot C_{10}^3}{C_{15}^5}$$

Приклад 3. Яка ймовірність того, що при випадковому розміщенні в ряд шести кубиків, взятих із восьми кубиків, на яких написані букви а, а, а, н, н, с, к, м вийде слово “ананас”.

Розв'язування. Позначимо через B подію – на шести випадково розміщених кубиках можна прочитати слово “ананас”. Всього можна прочитати стільки різних буквсполучень (слів), скільки може бути складено розміщень із восьми букв по шість, тобто A_8^6 . Сприяє події B лише один

наслідок. Шукана ймовірність: $P(B) = \frac{1}{A_8^6}$.

ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

– **Сумою декількох подій** називають подію, яка полягає в появі хоча б однієї із цих подій.

– **Сумою $A+B$ двох подій A і B** називають подію, що полягає в появі або події A , або події B , або обох цих подій.

– **Ймовірність суми двох несумісних подій A і B** дорівнює сумі ймовірностей цих подій: $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

– **Випадкові події утворюють повну групу**, якщо внаслідок випробування хоча б одна з них з'явиться обов'язково.

– Сума ймовірностей повної групи випадкових подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ дорівнює одиниці:
 $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$.

– Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

– Добутком декількох подій називають подію, яка полягає в сумісній появі всіх цих подій.

– Добутком двох подій A і B називають подію AB , що полягає в сумісній появі цих подій.

– Умовною ймовірністю $P_A(B)$ називають ймовірність подій B , обчислену при умові, що подія A вже наступила.

– Ймовірність добутку двох подій A і B дорівнює добутку ймовірностей однієї із них на умовну ймовірність другої, обчислену за умови, що перша подія уже наступила:

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A).$$

Для незалежних подій: $P(AB) = P(A)P(B)$.

– Ймовірність суми двох сумісних подій A і B дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Література: [1]: Розділ 2, параграфи 2.1-2.6;

[2]: Розділ 2, §1-4;

Розділ 3, §1-5;

Розділ 4, §1.

Методичні рекомендації щодо розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Із урни, яка містить n білих і m чорних кульок, виймають дві кульки. Яка ймовірність того, що вони різного кольору?

Розв'язування. Нехай подія A полягає в тому, що із урни витягнули першу кульку білу, а другу чорну; подія B – першу кульку чорну, а другу білу.

Тоді подію C – із урни витягнули кульки різного кольору, можна представити у вигляді суми подій A і B , тобто $C = A + B$.

Так як події A і B несумісні, то

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{n}{n+m} \cdot \frac{m}{n+m-1} + \frac{m}{n+m} \cdot \frac{n}{n+m-1} = \frac{2nm}{(n+m)(n+m-1)}.$$

Приклад 2. На полиці 15 підручників, 5 із яких переплетені. Навмання вибираються 3 підручники. Яка ймовірність того, що хоча б один із них буде переплетеним?

Розв'язування. Знайдемо ймовірність події $\bar{A}$, яка полягає в тому, що три підручники не переплетені. Позначимо через $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ відповідно події, які полягають в тому, що перший, другий, третій не переплетені. Тоді $\bar{A} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$.

Так як події $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ залежні, то

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1) \cdot P_{\bar{A}_1}(\bar{A}_2) \cdot P_{\bar{A}_1 \bar{A}_2}(\bar{A}_3) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} = \frac{24}{91}.$$

$$\text{Тоді } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}.$$

Приклад 3. Ймовірність влучення в мішень першим стрільком дорівнює 0,8, другим – 0,7, третім – 0,9. Стрілки зробили по одному пострілу. Яка ймовірність того, що в мішень влучили: а) два стрілки; б) всі три стрілки; в) хоча б один стрілок.

Розв'язування. Введемо позначення: $p_1 = 0,8$; $p_2 = 0,7$; $p_3 = 0,9$.

Тоді ймовірність не попадання в мішень для першого стрілка $q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,8 = 0,2$, для другого $q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,7 = 0,3$, для третього $q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0,9 = 0,1$.

а) $P(\text{"два стрілки влучили в мішень"}) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,1 + 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,9 + 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,056 + 0,216 + 0,126 = 0,398$.

б) $P(\text{"всі стрілки влучили в мішень"}) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,504$.

в) $P(\text{"хоча б один стрілок влучив в мішень"}) = 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 1 - 0,006 = 0,994$.

Тема 13. Умовна ймовірність та поняття про незалежність подій. Формули повної ймовірності та Байєса. Модель повторних випробувань. Схема Бернуллі

Формула повної ймовірності.

Ймовірність події A , яка може з'явитися лише при умові появи однієї із несумісних подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, що утворюють повну групу, дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної із цих подій на відповідну умовну ймовірність події A .

$P(A) = \sum P(H_n)P_{H_n}(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n)P_{H_n}(A)$, де $P(H_i)$ – ймовірність гіпотези; $P_{H_i}(A)$ – умовна ймовірність.

– **Формули Байєса** дають можливість переоцінити ймовірності гіпотез після того, як стає відомим результат випробування, внаслідок якого з'явилась подія A : $P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)}$.

Література: [1]: Розділ 2, параграф 2.7;
[2]: Розділ 4, §2, §3.

Методичні рекомендації щодо розв'язування типових прикладів

Приклад 1. В кожній із 2-х урн по 4 білих і 6 чорних кульок. Із першої урни переклали в другу дві кульки. Знайти ймовірність того, що куля, вийнята із другої урни після перекладання, буде чорною?

Розв'язування. Позначимо через A подію – із другої урни, після перекладання, витягнули чорну кульку.

Можливі наступні припущення (гіпотези) щодо того, які кульки перекладено із першої урни в другу:

H_1 – дві білих кульки;

H_2 – дві чорних кульки;

H_3 – дві різних кульки.

Знайдемо ймовірності гіпотез:

$$P(H_1) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15}, \quad P(H_2) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}, \quad P(H_3) = \frac{C_4^1 \cdot C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}.$$

Умовна ймовірність того, що із другої урни витягнули чорну кульку, при умові, що переклали дві білих кульки, $P_{H_1}(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Умовна ймовірність того, що із другої урни витягнули чорну кульку, при умові, що переклали дві чорних кульки, $P_{H_2}(A) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Умовна ймовірність того, що з другої урни витягнули чорну кульку, при умові, що переклали дві різних кульки, $P_{H_3}(A) = \frac{7}{12}$.

Згідно формули повної ймовірності, шукана ймовірність дорівнює:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)$$

$$P(A) = \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{12} = \frac{3}{5}$$

Приклад 2. В магазин надходить продукція із трьох підприємств в кількості 20, 50, 30 виробів відповідно. Ймовірності виготовлення неякісного виробу для кожного підприємства відповідно дорівнюють 0,01; 0,04; 0,03. Навмання вибраний виріб виявився неякісним. Якому підприємству, ймовірніше всього, належить цей виріб?

Розв'язування. Подія A – вибрано неякісний виріб. Гіпотези H_1, H_2, H_3 – це вибір виробу із продукції відповідного підприємства. Ймовірності цих подій дорівнюють:

$$P(H_1) = \frac{20}{100} = 0,2; \quad P(H_2) = \frac{50}{100} = 0,5; \quad P(H_3) = \frac{30}{100} = 0,3.$$

Використовуючи формулу повної ймовірності знаходимо

$$P(A) = 0,2 \cdot 0,01 + 0,5 \cdot 0,04 + 0,3 \cdot 0,03 = 0,031.$$

За формулами Байєса знаходимо умовні ймовірності гіпотез:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,002}{0,031} = \frac{2}{31};$$

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{P(A)} = \frac{0,02}{0,031} = \frac{20}{31};$$

$$P_A(H_3) = \frac{P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)}{P(A)} = \frac{0,03}{0,031} = \frac{30}{31}.$$

Так як $\max\left\{\frac{2}{31}; \frac{20}{31}; \frac{30}{31}\right\} = \frac{30}{31}$, то ймовірніше всього, що вибраний неякісний виріб належить третьому підприємству.

ПОСЛІДОВНОСТІ ВИПРОБУВАНЬ

– **Схема Бернуллі:** нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному із яких подія A може появитися або не появитися; ймовірність появи події A в усіх випробуваннях однакова (дорівнює p) і не залежить від появи або не появи A в інших випробуваннях; ймовірність не появи події A в кожному випробуванні також постійна і дорівнює $q=1-p$.

– **Формула Бернуллі:**
$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

дає можливість знаходити ймовірність появи події A k разів при n випробуваннях, які утворюють схему Бернуллі.

– **Локальною функцією Лапласа** називають функцію виду

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$\varphi(x)$ – парна, табульована для додатних x ;

$$\varphi(-x) = \varphi(x).$$

– **Інтегральною функцією Лапласа** називають функцію

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$\Phi(x)$ – непарна, табульована для додатних x .

– **Локальна теорема Лапласа.** Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні постійна і $0 < p < 1$, то ймовірність $P_n(k)$ того, що подія A наступить в n випробуваннях рівно k разів, наближено дорівнює

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \quad \text{де } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

– **Інтегральна теорема Лапласа.** Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні постійна і $0 < p < 1$, то ймовірність $P_n(k_1; k_2)$ того, що подія A появиться в n випробуваннях від k_1 до k_2 раз, наближено дорівнює визначеному інтегралу

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

$$\text{де } x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}.$$

– **Асимптотична формула Пуассона.** Якщо в схемі Бернуллі n – велике, а ймовірність події p достатньо мала ($p \leq 0,1$), то $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, де $\lambda = np$.

– **Найімовірнішим числом** називають найбільш імовірне значення k_0 числа k появ події A .

Найімовірніше число k_0 визначається із подвійної нерівності

$$np - q \leq k_0 \leq np + p.$$

– **Ймовірність того, що відхилення відносної частоти $\frac{m}{n}$ від постійної ймовірності p по абсолютній величині не перевищує заданого числа $\varepsilon > 0$,** наближено дорівнює значенню подвоєної функції

$$\text{Лапласа } \Phi(x), \text{ тобто } P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi(x), \quad \text{де } x = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

Література: [1]: Розділ 3, параграфи 3.1-3.5;

[2]: Розділ 5, §1-§4.

Методичні рекомендації щодо розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Монету кинуто шість разів. Знайти ймовірність того, що “герб” випаде рівно чотири рази.

Розв'язування. Використовуємо формулу Бернуллі

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

де за умовою задачі $n = 6, p = \frac{1}{2}, q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, k = 4$.

$$\text{Маємо } P_6(4) = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64}.$$

Приклад 2. Ймовірність присутності студента на лекції дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що із 100 студентів на лекції буде: а) 75 студентів; б) не менше 90 студентів.

Розв'язування.

а) За умовою $n=100, p=0,8; q=0,2; k=75$. Використовуємо локальну теорему Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \text{ де } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Знайдемо значення x : $x = \frac{75 - 80}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{-5}{4} = -1,25$.

По таблиці значень функції $\varphi(x)$ знаходимо $\varphi(1,25) = 0,1825$.

Так як $\varphi(-x) = \varphi(x)$, то $\varphi(-1,25) = 0,1825$. Шукана ймовірність

$$P_{100}(75) \approx \frac{0,1825}{4} \approx 0,046.$$

б) Використовуємо інтегральну теорему Лапласа:

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

де $x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}; x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}.$

За умовою $k_1 = 90, k_2 = 100$. Знаходимо x' і x'' :

$$x' = \frac{90 - 80}{4} = \frac{10}{4} = 2,5; x'' = \frac{100 - 80}{4} = \frac{20}{4} = 5.$$

По таблиці значень функції $\Phi(x)$ знаходимо $\Phi(2,5) = 0,4938; \Phi(5) = 0,49997$. Шукана ймовірність

$$P_{100}(90; 100) \approx 0,499997 - 0,4938 = 0,006197.$$

Тема 14. Дискретні випадкові величини, їх закони розподілу та числові характеристики. Неперервні та абсолютно неперервні випадкові величини. Функція та щільність розподілу ймовірності. Числові характеристики. Рівномірний, показниковий та нормальний закони розподілів ймовірностей.

Випадковою величиною називають таку величину, яка в наслідок випробування може прийняти лише одне числове значення, заздалегідь невідоме і обумовлене випадковими причинами.

– **Дискретною випадковою величиною (ДВВ)** називають таку величину, яка може приймати відокремлені ізольовані одне від одного числові значення (їх можна пронумерувати) з відповідними ймовірностями.

– **Законом розподілу випадкової величини** називають таке співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм ймовірностями.

– **Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X** називають число, яке дорівнює сумі добутків усіх можливих значень X на відповідні їм ймовірності.

$$M(X) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot p_k.$$

– **Дисперсією** дискретної випадкової величини X називають число, яке дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення ДВВ X від її математичного сподівання.

$$D(X) = M((X - M(X))^2).$$

Формула для знаходження дисперсії: $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

– **Середнє квадратичне відхилення** дорівнює квадратному кореню з дисперсії і позначається $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

– **Початковим моментом порядку k** випадкової величини X називають математичне сподівання величини X^k і позначають

$$\mu_k = M(X^k), k = 1, 2, \dots, n.$$

– **Центральним моментом порядку K** випадкової величини X називають математичне сподівання величини $(X - M(X))^k$ і позначають

$$\mu_k = M((X - M(X))^k), k = 1, 2, \dots, n.$$

– **Біноміальний закон розподілу** має вигляд

$$P(X = m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}, m = 0, 1, 2, \dots, n$$

і використовується у схемі Бернуллі, тобто у випадку n незалежних повторних випробувань, в кожному з яких деяка подія з'являється з ймовірністю p .

– Геометричний розподіл має вигляд

$$P(X = m) = pq^{m-1},$$

де: $p = p(A)$ – ймовірність появи події A в кожному випробуванні, $q = 1 - p$,

X – кількість випробувань до появи події A в серії незалежних повторних випробувань.

Література: [1]: Розділ 4, параграфи 4.1., 4.2;

[2]: Розділ 6, §1-§4, §7;

Розділ 7, §1-§5;

Розділ 8, §1-§10.

Методичні рекомендації щодо розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Абітурієнт складає два вступних іспити: з математики і з фізики. Скласти закон розподілу випадкової величини X , числа отриманих п'ятірок, якщо ймовірність отримання п'ятірки з математики дорівнює 0,8, а з фізики – 0,6.

Розв'язування. Очевидно, можливі значення X такі: 0, 1, 2, причому

$$P(X = 0) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08;$$

$$P(X = 1) = P(A_1 \cdot \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \cdot A_2) = 0,8 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,44;$$

$$P(X = 2) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48.$$

Тут A_1 і A_2 – події, які полягають в тому, що математику і фізику, відповідно, складено на п'ятірку. При обчисленні ймовірностей використовувалась несумісність доданків і незалежність множників. В результаті отримуємо закон розподілу:

X	0	1	2
p	0,08	0,44	0,48

Приклад 2. Згідно з американськими статистичними таблицями смертності ймовірність того, що 25-річна людина проживе ще один рік, дорівнює 0,992 (отже, ймовірність того, що вона помре, дорівнює 0,008). Страхова компанія пропонує молодій людині застрахувати своє життя на рік на суму 1000\$; страховий внесок дорівнює 10\$. Знайти математичне сподівання прибутку компанії.

Розв'язування. Величина прибутку X є випадковою величиною із значеннями +10\$ (якщо застрахована особа не помре) і -990\$ (якщо вона помре). Складемо таблицю розподілу ймовірностей:

x	10	-990
p	0,992	0,008

$$M(X) = 10 \cdot 0,992 - 990 \cdot 0,008 = 2.$$

Очікуваний середній прибуток додатний, що дає можливість страховій компанії продовжувати справу, залишаючи резервний капітал для виплати страхових сум, здійснювати адміністративні витрати, отримувати прибуток.

Приклад 3. Гра в рулетку. На колесі рулетки є 38 однаково розміщених гнізд, які нумеруються так 00, 0, 1, 2, ..., 35, 36. Гравець може поставити 1 долар на будь-який номер. Якщо його номер виграв, гравець отримує 36\$ (35\$ виграшу плюс 1\$ ставки). Знайти математичне сподівання виграшу гравця.

Розв'язування. Складемо таблицю ймовірностей:

x	-1	+35
p	37/38	1/38

$$M(X) = -37/38 + 35/38 = -2/38 = -1/19.$$

Гра не є “справедливою”, ігорний дім забезпечує собі середній прибуток на “накладні витрати” і ризик.

ФУНКЦІЇ І ЩІЛЬНОСТІ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

– **Неперервною випадковою величиною** (НВВ) називають величину, яка може приймати будь-яке значення з деякого скінченного або нескінченного інтервалу (a, b) . Кількість можливих значень такої величини є нескінченна.

– **Інтегральною функцією розподілу** (функцією розподілу) називають ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менше x : $F(x) = P(X < x)$.

– **Диференціальною функцією розподілу** або щільністю імовірностей неперервної випадкової величини називають похідну першого порядку від її інтегральної функції розподілу і позначають $f(x) = F'(x)$.

– Математичне сподівання неперервної випадкової величини, яка приймає значення з відрізка $[a, b]$ та має щільність імовірності $f(x)$, знаходиться за формулою $M(X) = \int_a^b xf(x)dx$.

– Дисперсія НВВ X визначається як $M[(X - M(X))^2]$ і обчислюється за формулою $D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - [M(X)]^2$.

– Середнє квадратичне відхилення НВВ визначається та обчислюється так $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

– Величина X розподілена рівномірно у проміжку (a, b) , якщо усі її можливі значення належать цьому проміжку і щільність її імовірностей у цьому проміжку постійна, тобто

$$f(x) = \begin{cases} C = \frac{1}{b-a} \text{ при } x \in (a, b) \\ 0, \text{ при } x \notin (a, b) \end{cases}$$

– Випадкову величину X називають розподіленою за показниковим законом, якщо щільність її імовірностей має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \text{ при } x \geq 0; \\ 0, \text{ при } x < 0, \end{cases}$$

де $\lambda > 0$ - параметр.

– Випадкову величину X називають розподіленою нормально, якщо щільність її імовірностей має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де a та σ - параметри розподілу.

– Числові характеристики рівномірно розподіленої НВВ:

$$M(X) = \frac{b+a}{2}$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

– Числові характеристики НВВ розподіленої за показниковим законом:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

– Модую $M_0(X)$ називають таке можливе значення X , при якому щільність розподілу набуває максимуму.

– Медіаною $M_e(X)$ називають таке можливе значення X , при якому ордината $f(x)$ ділить пополам площу, обмежену кривою розподілу.

– Ймовірність попадання неперервної випадкової величини в заданий інтервал $(a; b)$ знаходиться за

формулою: $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ – диференціальна функція розподілу неперервної

випадкової величини.

– Ймовірність попадання в заданий інтервал нормально розподіленої випадкової величини X дорівнює $P(\alpha < X < b) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$.

– Ймовірність заданого відхилення для нормально розподіленої випадкової величини X знаходиться за формулою $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

Література: [1]: Розділ 4, параграфи 4.1., 4.3;

[2]: Розділ 10, §1-§3

Методичні рекомендації щодо розв'язування типових прикладів

Приклад 1. Знайти числові характеристики випадкової величини X , яка задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x^2}{25}, & 0 < x < 5; \\ 1, & x \geq 5. \end{cases}$$

Розв'язування. Знайдемо диференціальну функцію розподілу $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{25}x, & 0 \leq x \leq 5; \\ 0, & x \notin [0; 5] \end{cases}$$

За формулою $M(x) = \int_a^b xf(x)dx$ знаходимо математичне сподівання

$$M(x) = \int_0^5 x \cdot \frac{2x}{25} dx = \frac{2}{25} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^5 = \frac{10}{3}.$$

Дисперсію знаходимо за формулою $D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - M^2(X)$, тобто

$$D(X) = \int_0^5 x^2 \cdot \frac{2x}{25} dx - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{2}{25} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^5 - \frac{100}{9} = \frac{25}{18}.$$

Середнє квадратичне відхилення дорівнює:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{25}{18}} = \frac{5}{3\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{6} \approx 1,17.$$

Приклад 2. Випадкова величина X задана законом розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ a \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, \\ 1, & x > \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Знайти невідомий параметр a і ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$.

Розв'язування. Якщо всі можливі значення випадкової величини X належать інтервалу (a, b) , то $F(x)=1$, при $x \geq b$. Згідно цієї властивості маємо $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$. За умовою

$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$. Із співвідношення $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} = 1$, маємо $a=1$. Ймовірність попадання випадкової величини X в заданий інтервал знаходимо за формулою $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{3}\right) = F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Тема 15. Закони великих чисел та центральна гранична теорема

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, що містить такі питання теми: нерівність Чебишева.

Термінологічний словник ключових понять

Нерівність Чебишева: ймовірність того, що відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання по абсолютній величині менше додатного числа ε , не менше, ніж $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Теорема Чебишева: якщо $X_1, X_2, \dots, X_n$ – попарно незалежні випадкові величини, причому дисперсії їх рівномірно обмежені (не перевищують постійного числа C) то, яким би малим не було додатне число ε , ймовірність нерівності

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon$$

буде як завгодно близько до одиниці, якщо число випадкових величин достатньо велике.

Теорема Бернуллі: якщо в кожному із n незалежних випробувань ймовірність p появи події A постійна, то як завгодно близько до одиниці ймовірність того, що відхилення відносної частоти від ймовірності p за абсолютною величиною буде достатньо малим, якщо число випробувань достатньо велике.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

де ε – як завгодно мале додатне число.

Теорема Ляпунова (центральна гранична теорема): якщо випадкова величина X є сумою великого числа взаємонезалежних випадкових величин, вплив кожної із яких на всю суму значно малий, то X має розподіл, близький до нормального.

Тема 16. Основні поняття математичної статистики: вибіркові спостереження та вибіркові оцінки. Методи параметричного та непараметричного оцінювання параметрів. Методи перевірки статистичних гіпотез

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, що містить такі питання теми: вибірка, генеральна сукупність, мода, медіана, відносна частота, гістограма, полігон, емпірична функція.

Термінологічний словник ключових понять

Генеральна сукупність – множина всіх однорідних об'єктів, які вивчають відносно якісної або кількісної ознаки X .

Вибіркова сукупність або вибірка – об'єкти, які випадково вибрані з генеральної сукупності для дослідження.

Об'єм генеральної сукупності N – число об'єктів генеральної сукупності. Аналогічно n – об'єм вибірки.

Варіанти ознаки X – це значення ознаки: $x_1, x_2, \dots, x_k$.

Частота n_i – число спостережень значення ознаки x_i .

Відносною частотою варіанти x_k називається відношення частоти n_k варіанти x_k до об'єму вибірки n і позначається ω_k .

$$\omega_k = \frac{n_k}{n}; \sum_{k=1}^m \omega_k = 1.$$

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Статистичний розподіл вибірки встановлює зв'язок між рядом варіант, що зростає або спадає, і відповідними частотами.

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k.$$

Якщо кількість різних варіант велика, то складають інтервальний варіаційний ряд. Для цього інтервал значень варіаційного ряду $(x_{\min}, x_{\max})$ розбивають на m інтервалів однакової довжини

$$h = \frac{(x_{\max} - x_{\min})}{m}.$$

Для вибірки з неперервної генеральної сукупності складають тільки інтервальний варіаційний ряд.

Модую M_0 називають варіанту, яка має найбільшу частоту.

Медіаною m_e називають варіанту, яка ділить варіаційний ряд на дві частини, які мають однакову кількість варіант.

Якщо кількість варіант – непарне число, тобто $n = 2k + 1$, то $m_e = x_{k+1}$. Якщо $n = 2k$, то

$$m_e = \frac{(x_k + x_{k+1})}{2}.$$

Графічні зображення статистичних розподілів

Полігон частот – це ламана, відрізки якої з'єднують точки з координатами: $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)$.

Гістограма частот (будується для інтервальних варіаційних рядів) – це східчаста фігура, що складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали варіант довжиною $h = x_k - x_{k-1}$, а

висоти дорівнюють – щільності частоти – $\frac{n_k}{(h)}$.

Емпірична функція розподілу (або функція розподілу вибірки) – це функція $F^*(x)$, яка визначає для кожного значення x частість події $X < x$ і обчислюється за формулою $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, де n_x – кількість варіант менших за X ; n – об'єм вибірки.

Приклад 6. Побудувати емпіричну функцію за даним розподілом вибірки:

x_i	3	5	12
y_i	4	6	10

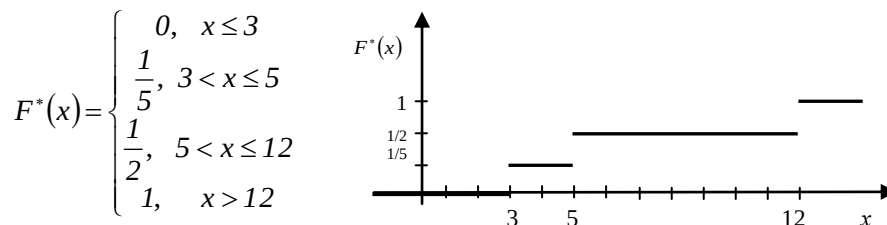
Розв'язання. Об'єм вибірки $n = 4 + 6 + 10 = 20$.

Найменша варіанта $x = 3$, отже, $F^*(X) = 0$ при $x \leq 3$.

Значення $x < 5$ спостерігається 4 рази, отже, $F^*(X) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ при $3 < x \leq 5$.

$x < 12$ спостерігається $4 + 6 = 10$ разів, отже, $F^*(X) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ при $5 < x \leq 12$.

Оскільки $x = 12$ найбільша варіанта, то $F^*(X) = 1$ при $x > 12$. Таким чином емпірична функція має вигляд:



Числові характеристики вибірки

1. Вибіркова середня – $\bar{x}_B$: $\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m n_k \cdot x_k$.

2. Вибіркова дисперсія – D_B : $D_B = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m n_k (x_k - \bar{x}_B)^2$.

Для обчислення дисперсії застосовують формулу $D(x) = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$, де $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m n_k \cdot x_k$; $\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m n_k \cdot x_k^2$.

3. Вибіркове середнє квадратичне відхилення або вибіркове стандартне відхилення – σ_B :
 $\sigma_B = \sqrt{D_B}$.

Метод добутоків для обчислення характеристик вибірки з рівновіддаленими варіантами

Рівновіддаленими варіантами називають арифметичну прогресію з різницею h (h – крок).

Умовними варіантами називають варіанти, які визначаються за формулою $u_i = \frac{x_i - C}{h}$, де C – умовний нуль (варіанта з найбільшою частотою); h – довжина інтервалів.

Умовні моменти першого і другого порядку:

$$M_1^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i u_i, \quad M_2^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i u_i^2.$$

$$\text{Тоді } \bar{X}_B = M_1^* h + C, \quad D_B = (M_2^* - (M_1^*)^2) h^2.$$

Приклад 7. Для даної вибірки обчислити методом добутоків вибіркову середню, вибіркову дисперсію.

x_i	55,5	58,5	61,5	64,5	67,5	70,5	73,5	76,5	79,5
n_i	5	6	11	9	16	20	6	3	2

Розв'язання. Оскільки варіанти рівновіддалені із кроком $h=3$, то для обчислення вибіркових числових характеристик можна застосувати метод добутоків. Складемо розрахункову таблицю, де за умовний нуль обрано варіанту $C = 67,5$; яка розташована посередині варіаційного ряду

x_i	n_i	u_i	$u_i n_i$	$u_i^2 n_i$
55,5	5	-4	-20	80
58,5	6	-3	-18	54
61,5	11	-2	-22	44
64,5	9	-1	-9	9
67,5	16	0	0	0
70,5	20	1	20	20
73,5	6	2	12	24
76,5	3	3	9	27
79,5	2	4	8	32
Σ	78		-20	290

Обчислимо умовні моменти першого та другого порядку:

$$M_1^* = \frac{\sum u_i n_i}{n} = \frac{-20}{78} = -0,26; \quad M_2^* = \frac{\sum u_i^2 n_i}{n} = \frac{290}{78} = 3,72.$$

Тоді вибіркове середнє становитиме:

$$\bar{x} = M_1^* h + C = -0,26 \cdot 3 + 67,5 = 66,7,$$

а вибіркова дисперсія $D_B = (M_2^* - (M_1^*)^2) h^2 = (3,72 - (-0,26)^2) 3^2 = 32,87.$

Завдання для самостійної роботи

- Для даної вибірки скласти статистичний розподіл. Побудувати полігон частот.
 4, 5, 7, 6, 9, 9, 8, 4, 4, 5, 6, 5, 7, 8, 4, 6, 7, 5, 6, 7, 6, 8, 8, 9, 6, 5, 8, 4, 6, 8.

Знайти числові характеристики заданої вибірки $\bar{x}_B$, D_B , σ_B .

- За даними вибірки побудувати гістограму.

x_k	4-8	8-12	12-16	16-20
n_k	4	10	12	3

- Знайти емпіричну функцію заданого розподілу.

a)	x_k	2	5	7
	n_k	2	15	3

b)	x_k	3	6	7	8	10
	n_k	5	8	10	7	5

- Знайти для заданого статистичного розподілу $\bar{x}_B$, D_B , σ_B .

x_k	1	3	6	26
n_k	8	40	10	2

- Методом добутоків за даними вибірки знайти $\bar{x}_B$, D_B , σ_B .

а)

x_k	145	149	153	157	161
n_k	8	15	25	7	5

б)

x_k	10	15	20	25	30
n_k	2	5	14	10	4

6. Методом найменших квадратів знайти рівняння прямої лінії регресії $y = ax + b$ та коефіцієнт кореляції r_B .

а)

x	1	3	4	6	7	8
y	1	1	2	2	4	5

б)

x	2	5	4	6	7	9	10
y	1	3	2	2	4	5	6

Модуль 4. Математичне програмування та дослідження операцій

Розділ 9. Математичне програмування

Тема 17. Предмет математичного програмування. Лінійне програмування

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, що містить такі питання теми: загальна постановка оптимізаційної задачі, її структура: цільова функція, обмеження як спосіб опису множини допустимих планів. Означення розв'язку цільової функції, точка екстремуму; проблема його пошуку. Геометричний метод розв'язування задач лінійного програмування. Правила переходу від загальної задачі лінійного програмування до канонічної та стандартної. Поняття опорного плану, теореми про існування опорного плану, оптимального опорного плану. Алгоритм графічного методу. Алгоритм симплекс-методу. Поняття про модифікований алгоритм симплекс-методу.

Термінологічний словник ключових понять

Математичне програмування це математична дисципліна, яка займається вивченням екстремальних задач і розробкою методів їх розв'язання.

Математична модель (постановка) екстремальної задачі в загальному вигляді полягає у визначенні найбільшого або найменшого значення функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за умов $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i$ ($i = \overline{1, m}$), де f і g_i - задані функції, а b_i - деякі дійсні числа.

Задачею лінійного програмування (ЛП) називається задача, якщо всі функції f і g_i лінійні.

Задачею нелінійного програмування називається задача, де хоча б одна з функцій f і g_i нелінійна.

Загальною задачею лінійного програмування називається задача, яка полягає у визначенні максимального (мінімального) значення функції

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1)$$

$$\text{За умов } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, k}) \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{k+1, m}) \quad (3)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, \ell}, \ell \leq n) \quad (4)$$

де a_{ij}, b_i, c_j - постійні величини і $k \leq m$.

Цільовою функцією (ЦФ) (або лінійною формою) називається функція (1) $F = \sum_{j=1}^n c_j x_j$,

максимальне (мінімальне) значення якої необхідно знайти.

Стандартна (симетрична) форма задачі лінійного програмування це задача, яка складається у визначенні максимального значення цільової функції при виконанні умов (2) і (4), де $k = m$ і $\ell = n$

Канонічною (основною) задачею ЛП називається задача, яка складається в визначенні максимального значення цільової функції при виконанні умов (3) і (4), де $k = 0$ і $\ell = n$.

Планом (або допустимим розв'язком) називається сукупність чисел $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, що задовольняють обмеження загальної задачі лінійного програмування (2) -(4).

Оптимальним планом називається такий план $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ при якому ЦФ набуває свого максимального (мінімального) значення.

Опорним рішенням (планом) задачі ЛП називається базисний невід'ємний розв'язок.

Системою обмежень називаються обмеження, які математично записуються у вигляді рівнянь або нерівностей(2)-(4).

Багатокутником планів завдання ЛП називається область на площині, яка задовольняє систему обмежень(2) при $n=2$.

Градiєнтном функції називається вектор, що показує напрям найшвидшої зміни цільової функції.

Графічний метод застосовується для розв'язання задач лінійного програмування з двома змінними, заданими в неканонічній формі, і багатьма змінними в канонічній формі за умови, що вони містять не більше двох вільних змінних.

Симплексний метод розв'язання задачі ЛП заснований на переході від одного опорного плану до іншого, при якому значення цільової функції зростає (за умови, що це завдання має оптимальний план і кожен її опорний план є не виродженим). Вказаний перехід можливий, якщо відомо який-небудь початковий опорний план.

Невиродженим називається такий опорний план, що містить рівно m додатних компонентів, інакше він називається виродженим.

Симплексна таблиця має вигляд:

B	C_b	P_0	c_1	c_2	$\dots$	c_n
			P_1	P_2	$\dots$	P_n
P_i	c_i	θ_i	a_{i1}	a_{i2}	$\dots$	a_{in}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
P_k	c_k	θ_k	a_{k1}	a_{k2}	$\dots$	a_{kn}
І.С.		F_0	Δ_1	Δ_2	$\dots$	Δ_n

М-метод - метод штучного базису застосовується для задач лінійного програмування, що записані у формі основної задачі і мають опорні плани, де серед векторів P_j (у векторній формі) не завжди є m одиничних.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

1. Задачі лінійного програмування

Багато виробничих та економічних проблем пов'язані з оптимізацією (максимізацією або мінімізацією) функції при певних обмеженнях, що задаються у вигляді системи рівнянь або нерівностей.

Функція, яка оптимізується, називається **цільовою функцією**.

Прикладами цільових функцій є функція прибутку, функція витрат.

Система рівнянь або нерівностей утворює систему лінійних обмежень, при яких оптимізується цільова функція (наприклад, обмеження на ресурси, такі як матеріальні, трудові тощо) і істотно впливає на розв'язання задачі. Задачі подібного типу розв'язуються методами математичного програмування.

Зокрема, задачі, в яких цільова функція та система обмежень виражені лінійними рівняннями або нерівностями, розв'язуються методами лінійного програмування.

У загальному вигляді задача лінійного програмування може бути записана як математична модель, а саме:

Знайти максимальне (мінімальне) значення функції

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \text{при обмеженнях} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, k})$$

де a_{ij} , b_i , c_j – будь-які дійсні числа, $x_i \geq 0$, $i = \overline{1, k}$.

2. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

Задачі лінійного програмування, які містять не більше двох змінних, мають просту геометричну інтерпретацію.

Розглянемо конкретну задачу лінійного програмування.

Приклад 44. Знайти максимальне значення функції $f = 3x_1 + 2x_2$

$$\text{при обмеженнях} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Розв'язання. Система лінійних нерівностей визначає певну область S , показану на Рис. 4. Кожна точка цієї області може претендувати на розв'язання заданої проблеми і тому область S називається множиною допустимих розв'язків або багатокутником допустимих розв'язків.

Мета полягає у тому, щоб серед усіх допустимих точок множини S знайти точку або точки, що оптимізують (у нашому випадку максимізують) цільову функцію.

Такий допустимий розв'язок називають **оптимальним рішенням** заданої проблеми.

Розглянемо теорему лінійного програмування, на якій базується графічний метод розв'язування задач, і яка приводиться без доведення.

Теорема. Якщо задача лінійного програмування має оптимальне рішення, то воно графічно зображується кутовою точкою або вершиною багатокутника допустимих розв'язків, що відповідає системі нерівностей даної задачі. Більш того, якщо цільова функція f досягає оптимального значення у двох суміжних вершинах багатокутника (області S), тоді вона оптимізується у кожній точці, що належить відрітку, який з'єднує ці вершини. Отже, у цьому випадку існує нескінченна множина розв'язків задачі лінійного програмування.

Приведена теорема стверджує, що для знаходження оптимального розв'язку задачі лінійного програмування можна перевірити множину вершин багатокутника допустимих розв'язків і серед них вибрати ту, у якій цільова функція досягає найбільшого або найменшого значення.

Існує простий алгоритм знаходження розв'язків задач лінійного програмування графічним методом:

1. Побудувати область допустимих розв'язків даної задачі.
2. Побудувати вектор росту цільової функції $\overrightarrow{OP}$ (коефіцієнти цільової функції є координати цього вектора).

3. Присвоїти значення нуль цільовій функції f . Тоді цільова функція $f = 0$ матиме вигляд лінійного рівняння від двох змінних x_1 та x_2 і зобразиться графіком прямої лінії $f = 0$ на координатній площині $x_1 O x_2$. пряма лінія $f = 0$ – це лінія, графік якої проходить через початок координат, перпендикулярно вектору $\overrightarrow{OP}$

4. Рухаючись у напрямку вектора росту $\overrightarrow{OP}$, ми одержуємо множину паралельних прямих виду $f = C$, які перетинають область допустимих розв'язків. Для одержання оптимального розв'язку поставленої проблеми необхідно із множини паралельних прямих знайти таку пряму, що найдаліше знаходиться від початку координат і перетинає область допустимих розв'язків тільки в кутовій точці.

Знайти вершину, в якій цільова функція досягає максимуму або мінімуму. Якщо існує тільки одна вершина, то поставлена задача має тільки одне оптимальне рішення. Якщо цільова функція оптимізується у двох суміжних вершинах області S , то існує безліч оптимальних розв'язків, які відповідають точкам, що лежать на відрізку, який з'єднує ці вершини.

Графічне зображення поставленої задачі представлено на Рис.20.

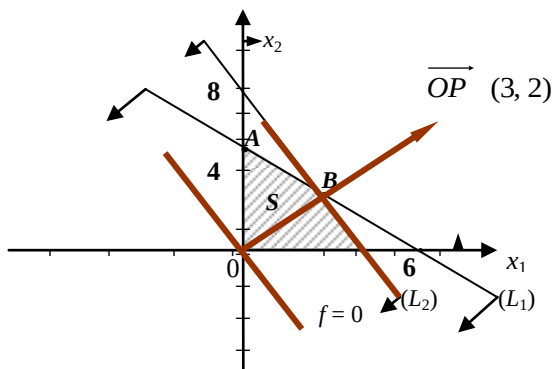


Рисунок 20

1. $L_1; 2x_1 + 3x_2 = 12$

$L_2; 2x_1 + x_2 = 8$

Область S або $OABC$ – область допустимих розв'язків.

2. $\overrightarrow{OP} = \{3; 2\}$

3. Точка B – точка, де цільова функція $f = 3x_1 + 2x_2$ досягає максимального значення. Знаходимо координати вершини B .

$$B = (L_1) \cap (L_2) \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 3; x_2 = 2. \quad B(3; 2)$$

У вершині $B(3; 2)$ цільова функція досягає максимального значення. Отже, $f = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 13$.

Завдання для самостійної роботи

1. У завданнях 1-11 розв'язати кожну із задач лінійного програмування графічним методом. Знайти найбільше і найменше значення функції f , що задовольняє заданим обмеженням:

$$\begin{array}{ll}
f = 8x_1 + 4x_2, & f = 3x_1 + x_2, \\
1. \begin{cases} x_1 - x_2 \geq -6, \\ -2x_1 + x_2 \geq -4, \\ x_1 + x_2 \geq -12, \\ -x_1 - 2x_2 \geq -4. \end{cases} & 2. \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -4, \\ -3x_1 + x_2 \geq -6, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq -12. \end{cases} \\
f = 4x_1, & f = -7x_1 + x_2, \\
3. \begin{cases} x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ 2x_1 - x_2 \geq -4, \\ 7x_1 + 14x_2 \geq -21, \\ -3x_1 + x_2 \geq -4. \end{cases} & 4. \begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 8, \\ -x_1 + x_2 \leq 7, \\ 3x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \geq -2. \end{cases} \\
f = x_1 - 7x_2, & f = -7x_2, \\
5. \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \geq -4, \\ 5x_1 - x_2 \geq -3, \\ x_1 - 3x_2 \leq 6. \end{cases} & 6. \begin{cases} x_1 + 5x_2 \leq 5, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq -6, \\ x_1 + 3x_2 \geq -9, \\ -3x_1 + 2x_2 \geq -6. \end{cases}
\end{array}$$

Тема 18. Двоїстість у лінійному програмуванні

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, що містить такі питання теми: Теорія двоїстості для випадку симетричної пари взаємодвоїстих задач: означення прямої задачі та двоїстої до неї у симетричному випадку, взаємозв'язок між ними; співвідношення між допустимими значеннями цільових функцій прямої та двоїстої задач. Перша та друга теореми двоїстості. Знаходження розв'язку однієї з пар симетричних взаємно двоїстих задач за відомим розв'язком іншої задачі. Економічна інтерпретація теорем двоїстості (оптимальні значення двоїстих змінних як оптимальні оцінки ресурсів у задачах оптимізації плану виробництва). Поняття про двоїстий симплекс-метод.

Термінологічний словник ключових понять

Теорія двоїстості - кожній задачі лінійного програмування можна певним чином зіставити деяку іншу задачу лінійного програмування, яка називається двоїстою або спряженою по відношенню до початкової або прямої. Теорія двоїстості є корисною для якісного аналізу задачі лінійного програмування.

Двоїста задача – це задача, де зв'язок прямої і двоїстої задачі полягає в тому, що коефіцієнти c_j цільової функції прямої задачі є вільними членами системи обмежень двоїстої задачі, вільні члени b_i системи обмежень прямої задачі служать коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі, а матриця коефіцієнтів системи обмежень двоїстої задачі є транспонованою матрицею коефіцієнтів системи обмежень прямої задачі.

Симетрична пара двоїстих задач. Якщо в парі двоїстої задачі: в системі обмежень прямої задачі нерівності виду " $\leq$ " (" $\geq$ "), то в системі обмежень двоїстої задачі нерівності виду " $\geq$ " (" $\leq$ "). При цьому змінні обох задач можуть приймати лише невід'ємні значення.

Несиметрична пара двоїстих задач. Якщо в парі двоїстих задач система обмежень прямої задачі має рівність (" $=$ "), то система обмежень двоїстої задачі – нерівність виду " $\geq$ " або " $\leq$ ". При цьому змінні прямої задачі – невід'ємні числа, а змінні двоїстої задачі можуть приймати будь-які значення (додатні або від'ємні).

Перша теорема двоїстості. Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний розв'язок, то і двоїста до неї задача має оптимальний розв'язок, причому значення цільової функції задач на своїх оптимальних рішеннях співпадають. Якщо ж одна із пари двоїстих задач не має розв'язку у вигляді необмеженості цільової функції, то друга не матиме розв'язку в вигляді несумісності системи обмежень.

Друга теорема двоїстості. Компоненти оптимального розв'язку однієї з задач (прямої або двоїстої) дорівнює абсолютним значенням коефіцієнтів при відповідних змінних цільової функції другої задачі (двоїстої або прямої) при досягненні нею оптимуму і за умови, що отриманий оптимальний розв'язок не є виродженим.

Двоїстий симплекс-метод. Двоїстий симплекс-метод, як і звичайний симплексний метод, дозволяє в результаті послідовного покращення допустимих опорних розв'язків, або знайти оптимальний розв'язок, або зробити висновок про його відсутність. Алгоритм двоїстого симплекс-метода такий, що як тільки майже допустимий опорний розв'язок стає допустимим, він стає також оптимальним.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

1. Подвійні задачі лінійного програмування

У практичних застосуваннях часто зустрічається інший різновид нестандартних задач лінійного програмування, який характеризується наступними особливостями:

1. Цільова функція мінімізується.
2. На всі змінні задачі накладається умова невід'ємності.
3. Кожне лінійне обмеження-нерівність має знак " $\geq$ ".

Зручний метод для розв'язання такого типу задач лінійного програмування базується на наступному спостереженні.

Кожна задача лінійного програмування, що містить умову максимізації цільової функції, асоціюється з іншою задачею, в якій необхідно мінімізувати цільову функцію та навпаки.

З метою ідентифікації задану задачу лінійного програмування називають основною задачею, а пов'язану з нею – подвійною задачею лінійного програмування.

Наступний приклад ілюструє техніку побудови подвійної задачі до заданої задачі лінійного програмування.

Приклад 48. Записати задачу, подвійну до заданої:

Знайти мінімальне значення цільової функції $\varphi = 6x_1 + 8x_2$

$$\text{при обмеженнях} \begin{cases} 40x_1 + 10x_2 \geq 2400 \\ 10x_1 + 15x_2 \geq 2100 \\ 5x_1 + 15x_2 \geq 1500 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Розв'язання. По-перше, побудуємо таблицю для даної основної задачі

x_1	x_2	Constant
40	10	2400
10	15	2100
5	15	1500
6	8	$\rightarrow \min$

Інтерпретуючи останню таблицю як вихідну (початкову) симплекс-таблицю для стандартної задачі лінійного програмування, за умови, що знаки коефіцієнтів цільової функції не змінюються на протилежні, одержуємо подвійну задачу лінійного програмування.

y_1	y_2	y_3	Constant
40	10	5	6
10	15	15	8
2400	2100	1500	$\rightarrow \max$

Знайти максимальне значення цільової функції

$$f = 2400y_1 + 2100y_2 + 1500y_3$$

$$\text{при обмеженнях} \begin{cases} 40y_1 + 10y_2 + 5y_3 \leq 6 \\ 10y_1 + 15y_2 + 15y_3 \leq 8 \end{cases}$$

де $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$

Взаємозв'язок між розв'язком основної та подвійної задач лінійного програмування розкривається наступною теоремою.

Основна теорема подвійності, визначена Дж. фон Нейманом (1903-1957), приводиться без доведення.

Теорема. Основна задача лінійного програмування має розв'язок тоді і тільки тоді, коли відповідна подвійна задача лінійного програмування також має розв'язок.

1. Цільові функції основної та подвійної задачі досягають одного і того ж за величиною оптимального значення.
2. Оптимальний розв'язок основної задачі лінійного програмування можна знайти в останньому рядку оптимальної симплекс-таблиці у стовпчиках, що відповідають додатковим змінним при розв'язанні подвійної задачі лінійного програмування симплекс-методом.

Керуючись основними положеннями теореми, розв'яжемо задачу прикладу 5.

Помічаємо, що побудована подвійна задача до заданої (основної) записана у стандартній формі і тому розв'яжемо її симплекс-методом.

Уводимо додаткові невід'ємні змінні y_4 та y_5 і одержуємо наступну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 40y_1 + 10y_2 + 5y_3 + y_4 = 6 \\ 10y_1 + 15y_2 + 15y_3 + y_5 = 8 \\ -2400y_1 - 2100y_2 - 1500y_3 + f = 0 \end{cases}, \text{ де } y_j \geq 0, j = \overline{1,5}$$

Реалізуючи алгоритм симплексного методу, одержуємо наступну послідовність симплекс-таблиць:

y_b	c	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	f
y_4	6	3/20	1	1/4	1/8	1/40	0
		(40)	10	5	1	0	0

:40; $\times(-10)$; (2400)

Таблиця 1

y_5	8	10	15	15	0	1	0
f	0	-2400	-2100	-1500	0	0	1

$$\vec{Y}_1 = \{0, 0, 0, 6, 8\} \text{ та } f_1 = 0.$$

Таблиця 2

y_b	c	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	f
y_1	3/20	1	1/4	1/8	1/40	0	0
y_5	13/2	0	25/2	11/10	-1/50	2/25	0
f	360	0	-1500	-1200	60	0	1

× (2/25); (-1/4); (1500)

$$\vec{Y}_2 = \left\{ \frac{3}{20}, 0, 0, 0, \frac{13}{2} \right\} \text{ та } f_2 = 360.$$

Таблиця 3

y_b	c	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	f
y_1	1/50	1	0	-3/20	3/100	-1/50	0
y_5	13/25	0	1	11/10	-1/50	2/25	0
f	1140	0	0	450	30	120	1

*Розв'язок для
основної задачі*

$$\vec{Y}_3 = \left\{ \frac{1}{50}, \frac{13}{25}, 0, 0, 0 \right\} \text{ і } f_{\max} = 1140.$$

Остання таблиця оптимальна.

Згідно основної теореми подвійності, розв'язок основної (вихідної) задачі: $x_1 = 30$ і $x_2 = 120$ з мінімальним значенням цільової функції φ , що дорівнює 1140, тобто $\varphi_{\min} = 1140$.

Зауважимо, що розв'язок подвійної задачі (на максимізацію цільової функції) одержується звичайним способом із останньої симплекс-таблиці, тобто $y_1 = \frac{1}{50}$; $y_2 = \frac{13}{25}$ та $y_3 = 0$, і $f = 1140$.

Помічаємо, що максимальне значення цільової функції f дорівнює мініальному значенню цільової функції φ , як і гарантує основна теорема подвійності.

2. Подвійний симплекс-метод

Зручним методом для розв'язання нестандартних задач лінійного програмування являється симплекс-метод.

Наступний приклад ілюструє техніку застосування подвійного симплекс-методу для розв'язання задач лінійного програмування.

Приклад 49. Знайти мінімальне значення функції

$$\varphi = 12x_1 + 9x_2 + 15x_3 + 4x_4$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 \geq 15 \\ 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 \geq 12 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4}$$

Розв'язання. Так як система обмежень складається із двох лінійних нерівностей, уводимо дві додаткові змінні x_5 і x_6 і приводимо її до системи двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 - x_5 = 15 \\ 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 - x_6 = 12 \end{cases},$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,6}$$

що еквівалентно

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 + x_5 = -15 \\ -9x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 7x_4 + x_6 = -12 \end{cases}$$

Далі, приводимо цільову функцію до наступної форми

$$-12x_1 - 9x_2 - 15x_3 - 4x_4 - 0 \cdot x_5 + \varphi = 0$$

та одержуємо систему лінійних рівнянь виду:

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 + x_5 = -15 \\ -9x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 7x_4 + x_6 = -12 \\ -12x_1 - 9x_2 - 15x_3 - 4x_4 - 0 \cdot x_5 - 0 \cdot x_6 + \phi = 0 \end{cases}$$

Відповідна розширена матриця останньої системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \phi \\ -3 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & -5 & -4 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & -9 & -15 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -15 \\ -12 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Помічаємо, що кожен із стовпчиків (x_5 , x_6 , та ϕ) розширеної матриці має одиничну форму, звідки слідує, що x_5 , x_6 , та ϕ - базисні змінні.

Вихідна симплекс-таблиця побудована на основі розширеної матриці системи має наступний вигляд

x_b	c (const)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ϕ	
x_5	15/2	3/2	1	5/2	1	-1/2	0	0	: (-2); x(7); (4)
x_6	-15	-3	-2	-5	-2	1	0	0	
ϕ	-12	-9	-5	-4	-7	0	1	0	
ϕ	0	-12	-9	-15	-4	0	0	1	

Таблиця 1

Перш ніж ми представимо повне розв'язання заданої задачі, підсумуємо основні кроки подвійного симплекс-методу.

Подвійний симплекс-метод

- Побудувати вихідну симплекс-таблицю.
- Визначити, чи досягнуто оптимальне рішення:
 - Якщо всі елементи стовпця вільних членів (const) – невід'ємні числа, то оптимальне рішення одержано. Перейти до п.4.
 - Якщо у стовпчику вільних членів є хоча б один від'ємний елемент, то оптимальне рішення не одержано. Перейти до п.3
- Виконати наступні ітерації:
 - Вибрати ведучий рядок: знайти найбільший за абсолютною величиною елемент стовпчика вільних членів. Рядок, що містить цей елемент і є ведучим рядком.
 - Вибрати ведучий стовпчик: розділити на від'ємні числа ведучого рядка відповідні елементи останнього рядка симплекс-таблиці. Найменше з одержаних відношень і відповідає ведучому стовпчику.
 - Знайти ведучий елемент як перетин ведучого рядка та ведучого стовпчика.
 - Використовуючи елементарні операції, привести ведучий стовпчик до одиничної форми додаванням відповідно домноженого ведучого рядка до кожного із останніх рядків. Перейти до п.2.
- Визначити оптимальне рішення.

Для цього в останній симплекс-таблиці всім базисним змінним надати відповідні числові значення із стовпчика вільних членів, всім іншим змінним надати нульові значення.

Повне розв'язування заданої задачі

Перший крок алгоритму подвійного симплекс-методу – побудова вихідної симплекс-таблиці уже здійснено (Див. Табл. 1)

Так як є від'ємні числа у стовпчику вільних членів вихідної симплекс-таблиці, то початкове рішення

$$\vec{X}_1 = \{0, 0, 0, 0, -15, -12\} \text{ та } \phi = 0 - \text{не оптимальне.}$$

Отже, переходимо до п.3.

Виконуємо наступні ітерації:

- Так як елемент (-15) у стовпчику вільних членів вихідної симплекс-таблиці має найбільшу абсолютну величину, то рядок x_5 – ведучий рядок.
- Розділимо на від'ємні числа ведучого рядка відповідні елементи останнього рядка таблиці і порівняємо одержані відношення.

$$\min \left\{ \frac{-12}{-3}; \frac{-9}{-2}; \frac{-15}{-5}; \frac{-4}{-2} \right\} = \frac{4}{2}$$

Отже, x_4 – ведучий рядок.

- Елемент (-2), що належить ведучому стовпчику і ведучому рядку – ведучий елемент.

Далі, приведемо ведучий елемент до 1, розділивши всі елементи ведучого рядка на (-2). Використовуючи елементарні операції, одержуємо наступну симплекс-таблицю.

Таблиця 2

x_b	c	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ϕ
x_4	15/2	3/2	1	5/2	1	-1/2	0	0
x_6	81/2	9	2	27/2	0	-7/2	1	0
ϕ	30	-6	-5	-5	0	-2	0	1

Стовпчик вільних членів останньої симплекс-таблиці не містить від'ємних чисел. Отже, приходимо до висновку, що оптимальне рішення досягнуто.

$$\vec{X}_2 = \{0, 0, 0, 15/2, 0, 81/2\} \text{ та } \phi_{\min} = 30.$$

Завдання для самостійної роботи

1.В завданнях 11-24 розв'язати задачі лінійного програмування подвійним симплекс-методом ($x_i \geq 0$).

$$\begin{aligned} f &= 4x_1 + 5x_2 + x_3, \\ 1. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 15, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 15. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= 6x_1 + x_2 + 4x_3, \\ 2. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 18, \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 28. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= 6x_1 + 3x_2 + 7x_3, \\ 3. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 18, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 26. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= x_1 + 4x_2 + 7x_3, \\ 4. \begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 6x_3 \leq 23, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 \leq 18. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= 7x_1 + x_3, \\ 5. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 8, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 16. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= 2x_1 + x_2 + 4x_3, \\ 6. \begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 \leq 25, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 18. \end{cases} \end{aligned}$$

Тема 19. Методика розв'язування транспортної задачі

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал: постановка транспортної задачі, умова існування її розв'язку. Пошук оптимального плану перевезень за методом потенціалів.

Термінологічний словник ключових понять

Транспортна задача (ТЗ) – одна з найпоширеніших задач ЛП. Її мета – розробка найбільш раціональних шляхів і способів транспортування товарів, усунення дуже далеких, зустрічних, повторних перевезень. Все це скорочує час перевезення товарів, зменшує витрати підприємств, фірм, що пов'язані з забезпеченням процесів постачання сировиною, матеріалами, топливом, обладнанням і т.д. Транспортна задача об'єднує широке коло задач з єдиною математичною моделлю. Данні задачі відносяться до задач ЛП і можуть бути розв'язані симплексним методом. Але матриця системи обмежень ТЗ настільки своєрідна, що для її розв'язку розроблено спеціальні методи. Ці методи, як і симплексний метод, дозволяють знайти початковий опорний розв'язок, а потім, покращуючи його, отримати оптимальний розв'язок.

Балансова умова - $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, де $\sum_{i=1}^m a_i$ - сумарні запаси вантажу постачальників, $\sum_{j=1}^n b_j$ - сумарні запити вантажу споживачів.

Закритий тип ТЗ – якщо $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$.

Відкритий тип ТЗ – якщо $\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$.

Метод північно-західного кута – полягає в тому, що запаси постачальника використовуються для забезпечення запитів споживачів до тих пір, доки не будуть вичерпані повністю, після чого використовуються запаси наступного по номеру постачальника. Заповнення таблиці ТЗ починається з лівого верхнього кута і складається з однотипових кроків. На кожному кроці, виходячи з запасів постачальника і запитів споживача, заповнюється тільки одна комірка і відповідно виключається з розгляду один постачальник або споживач.

Метод мінімальної вартості – полягає в тому, що вантаж розподіляється в першу чергу в ті комірки, в яких знаходиться мінімальний тариф перевезень. Далі поставки розподіляються в незайняті комірки з найменшими тарифами з урахуванням запасів, що залишилися у постачальників, і задоволення попиту споживачів. Процес розподілу продовжують до тих пір, поки весь вантаж від постачальників не буде вивезений, а споживачі не будуть задоволені. При розподілі вантажу може з'ясуватися, що кількість зайнятих комірок менше, ніж $m+n-1$. В цьому випадку недостатня їх кількість заповнюється комірками з нульовими поставками, такі комірками називають **умовно зайнятими**.

Циклом – називається така послідовність комірок таблиці ТЗ, в якій дві і тільки дві сусідні комірки розташовані в одному рядку або стовпчику, причому перша і остання комірки також знаходяться в одному рядку або стовпці. Цикл відображають в таблиці ТЗ в вигляді замкненої ломаної лінії. В будь-якій клітці циклу відбувається поворот ланки ломаної лінії на 90° .

Метод потенціалів – загальна ознака визначення оптимального плану ТЗ, аналогічна до принципу розв'язання задачі ЛП симплексним методом, а саме: спочатку знаходять опорний план ТЗ, а потім його послідовно покращують до отримання оптимального плану.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Постановка транспортної задачі і її математична модель

Транспортна задача є задачею лінійного програмування, але допускає розв'язок більш простими методами, ніж симплекс-метод.

Загальна постановка цієї задачі така:

Потрібно скласти план перевезень деякого однорідного вантажу з m пунктів відправлень, в кожному з яких є $a_1, a_2, \dots, a_m$ вантажу, відповідно, в n пунктів призначення з потребами вантажу $b_1, b_2, \dots, b_n$ одиниць таким числом, щоб задовольнити запити всіх споживачів і мінімізувати сумарну вартість перевезень. Вартість c_{ij} перевезень одиниці вантажу, тобто відповідні тарифи, для всіх можливих маршрутів (i, j) – відомі.

Для побудови математичної моделі транспортної задачі скористаємось транспортною таблицею:

Таблиця 1

i		j		Пункти призначення					
				(1)	(2)	...	(j)	...	(n)
				b_1	b_2	...	b_j	...	b_n
Пункти відправлень	(1)	a_1		c_{11}	c_{12}	...	c_{1j}	...	c_{1n}
	(2)	a_2		c_{21}	c_{22}	...	c_{2j}	...	c_{2n}
	...	...		...	...	...	...	...	...
	(i)	a_i		c_{i1}	c_{i2}	...	c_{ij}	...	c_{in}
	...	...		...	...	...	...	...	...
	(m)	a_m		c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mj}	...	c_{mn}
				x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mj}	...	x_{mn}

Зазвичай, вважають, що загальний запас вантажу в пунктах відправлень дорівнює сумарній потребі пунктів споживання, тобто

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Нехай x_{ij} кількість вантажу, яка відправляється з пункту відправлення (i) в пункт призначення (j) . На основі транспортної таблиці очевидно, що система змінних x_{ij} повинна задовольняти наступним умовам:

Знайти мінімальне значення функції

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & j = \overline{1, n} \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix}$$

Рівняння-обмеження (2) визначає сумарний обсяг поставок згідно рядків, а рівняння-обмеження (3) – сумарний обсяг поставок згідно стовпчиків транспортної таблиці 1.

Слід відзначити, що система рівнянь (1)-(4) представляє модель лінійного програмування з $(m+n)$ рівнянь та з mn змінними.

Приклад 50. Розв'язати транспортну задачу

В		(1)	(2)	(3)
А		25	27	28
(1)	20		5	3
(2)	35	4	12	5
(3)	25	3	6	4

Розв'язання. Визначимо тип транспортної задачі.

Загальний запас вантажу в пунктах відправлень:

$$20+35+25=80 \text{ або } \sum_{i=1}^3 a_i = 80.$$

Загальний обсяг потреб в пунктах призначення:

$$25+27+28=80 \text{ або } \sum_{j=1}^3 b_j = 80.$$

В силу того, що $\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^3 b_j$, то модель транспортної задачі – замкнена. Визначимо перший допустимий розв'язок методом “північно-західного кута”. Відповідна транспортна програма має наступний вигляд:

Таблиця 1

В		25	27	28	
А					
20	20	2	10	3	$u_1 = -2$
35	4	4	27	8	$u_2 = 0$
25	5	3	11	20	$u_3 = -1$
		$v_1 = 4$	$v_2 = 12$	$v_3 = 5$	

По-перше, перевіряємо умову невинороженості транспортної програми:

$$m+n-1=3+3-1=5$$

По-друге, знаходимо відповідне значення цільової функції:

$$f_1 = 2 \cdot 20 + 12 \cdot 27 + 5 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 20 = 499$$

По-третє, обчислимо значення потенціалів відповідних рядків та стовпчиків транспортної таблиці.

Нехай $u_2 = 0$, тоді

$$\begin{cases} u_2 + v_3 = 0 \\ u_3 + v_3 = 4 \\ u_2 + v_2 = 12 \\ u_3 + v_1 = 3 \\ u_1 + v_1 = 2 \end{cases}$$

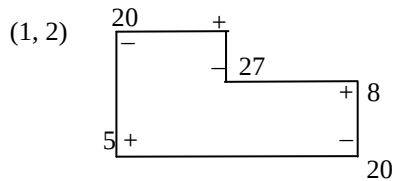
Отже, $u_1 = -2$; $u_2 = 0$; $u_3 = 1$; $v_1 = 4$; $v_2 = 12$; $v_3 = 5$.

Далі, визначаємо уявні транспортні тарифи для кожної незаповненої клітинки і порівняємо їх з реальними.

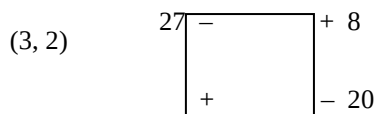
Зауважимо, що реальні тарифи записують у верхньому, тоді як уявні – в протилежному нижньому куті клітинки.

Помічаємо, що для деяких незаповнених клітинок уявні тарифи більші реальних, тобто одержана транспортна програма не оптимальна.

Для кожної клітинки, позначеної знаком “плюс”, будемо замкнений контур. Маємо для клітинок (1, 2) та (3, 2) зображуємо замкнуті контури



$S_{(1,2)} = (10-5) \cdot 20 = 100$ – на стільки грошових одиниць зменшаться транспортні витрати, при заповненні клітинки (1, 2)



$$S_{(3,2)} = (11-6) \cdot 20 = 100$$

Зауваження. Найбільше значення добутку $S_{(ij)} = x_{ij} \cdot (c'_{ij} - c_{ij})$ визначає клітинку, яку доцільно загрузити.

x_{ij} - найменше значення поставки серед тих, що у відповідному контурі відмічені знаком “мінус”.

Виберемо клітинку (3, 2) та заповнимо її. Одержуємо наступну транспортну таблицю.

Таблиця 2

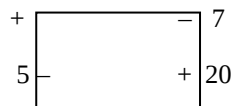
A \ B	25	27	28	
20	20	5	-2	$u_1=5$
35	9	7	28	$u_2=12$
25	5	20	-1	$u_3=6$
	$v_1=-3$	$v_2=0$	$v_3=-7$	

Як і раніше, згідно алгоритму, виконуємо наступні дії:

- 1) $m+n-1=5$;
- 2) $f_2 = 2 \cdot 20 + 12 \cdot 7 + 5 \cdot 28 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 20 = 399$;
- 3) В таблиці тільки одна пуста клітинка, для якої уявні тарифи більше реальних тобто $c'_{(2,1)} - c_{(2,1)} = 9 - 4 = 5$.

Отже, оптимальна програма не одержана.

- 4) Будемо замкнтий контур для клітинки (2, 1).



$$S_{(2,1)} = 5 \cdot 5 = 25$$

і переходимо до наступної транспортної таблиці.

Таблиця 3

A \ B	25	27	28	
20	20	10	3	$u_1=-2$
35	5	2	28	$u_2=0$
25	-2	25	-1	$u_3=-6$
	$v_1=4$	$v_2=12$	$v_3=5$	

$$f_3 = 2 \cdot 20 + 4 \cdot 5 + 12 \cdot 2 + 5 \cdot 28 + 6 \cdot 25 = 374$$

Оптимальний розв'язок не знайдено. Реалізуємо алгоритм транспортної програми і переходимо до наступної транспортної програми.

Таблиця 4

A \ B	25	27	28	
20	18	2	3	$u_1=2$
35	7	7	28	$u_2=4$
25	3	25	4	$u_3=3$
	$v_1=0$	$v_2=3$	$v_3=1$	

$$f_4 = 2 \cdot 18 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 28 + 6 \cdot 25 = 364.$$

Для будь-якої незавантаженої клітинки уявні тарифи менші або дорівнюють реальним, отже оптимальна програма перевезень знайдена.

Таким чином, мінімальні транспортні затрати дорівнюють 364 (грош. один.).

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати транспортну задачу.

Знайти такий план перевезень вантажів, який має найменші загальні витрати.

$A_i \backslash B_j$	$B_1=112-L$	$B_2=88+L$	$B_3=67+L$	$B_4=133-L$
$A_1=155-L$	7	1	3	2
$A_2=190-L$	11-M	8	1	4
$A_3=102+2L$	1	10-M	9	1+M

Значення L і M задаються викладачем.

Тема 20. Цілочислове програмування

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, що містить такі питання теми: математична постановка задач цілочислового (дискретного) програмування. Метод відтинань, метод Гоморі, поняття про метод гілок та меж розв'язування задач цілочислового програмування та меж розв'язування задач цілочислового лінійного програмування.

Термінологічний словник ключових понять

Цілочисельна задача лінійного програмування – екстремальна задача, змінні якої приймають лише цілочисленні значення.

Метод Гоморі. В основі методу ідея, яка полягає в тому, що спочатку розв'язується задача лінійного програмування без врахування умов цілочисельності. Якщо отриманий таким чином розв'язок цілочисельний, то він приймається за оптимальний план початкової задачі. Якщо розв'язок не є цілочисельним, то система обмежень доповнюється умовою, яка видаляє з множини планів задачі нецілочисельний оптимальний план, але при цьому зберігає цілочисельні вершини множини планів. Потім розв'язується задача лінійного програмування з додатковою умовою. Якщо отриманий таким чином розв'язок цілочисельний, то він є оптимальним. Якщо ж і після цього не для всіх змінних виконується умова цілочисельності, то вводиться нова умова – відсічення. Умову-відсічення вибирають таким чином, щоб за скінчене число кроків прийти до цілочисельного розв'язку, якщо він у даній задачі існує.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Поняття про цілочисельне програмування

В багатьох оптимізаційних задачах лінійного програмування накладається умова цілочисельності змінних.

Існує декілька методів розв'язання задач подібного типу, але найбільш поширений метод знаходження цілочисельних розв'язків задач лінійного програмування – це метод Гоморі.

Розглянемо наступну задачу лінійного програмування.

$$\text{Знайти мінімальне значення функції } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{при обмеженнях } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i; \quad i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0 \text{ та } x_j - \text{цілі числа} \end{cases} \quad (1)$$

Основна ідея розв'язання задач цілочисельного програмування полягає в тому, що спочатку розглядається і розв'язується відповідна умові (1) допоміжна задача лінійного програмування, яка не містить умову цілочисельності змінних. Далі використовуються згідно алгоритму Гоморі деякі перетворення, які як правило, приводять до цілочисельного розв'язку задачі (1).

Алгоритм Гоморі для задач цілочисельного програмування

1. Побудувати допоміжну задачу лінійного програмування і розв'язати її симплексним методом.

Нехай остання симплекс-таблиця допоміжної задачі містить оптимальний розв'язок і може бути представлена таблицею к.

Таблиця К

Рядок	X_B (базис)	C (const)	X_1	X_2	...	X_j	...	X_m	...	X_n	...
1	X_1	X_1^0	1	0	...	X_{1j}	...	0	...	X_{1n}	...
2	X_2	X_2^0	0	1	...	X_{2j}	...	0	...	X_{2n}	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
i	X_i	X_i^0	0	0	...	X_{ij}	...	0	...	X_{in}	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	X_m	X_m^0	0	0	...	X_{mj}	...	1	...	X_{mn}	...
0	Z	Z^0	0	0	...	...	...	0	...	...	...

Одержали допустимий розв'язок допоміжної задачі:

$$\vec{X}_k = \{x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0, \dots, x_m^0\} \text{ та } Z_k = Z^0 \quad (2)$$

2. Визначити, чи буде одержаний розв'язок оптимальним.

а) Якщо одержаний розв'язок задовольняє умові цілочисельності, то одержаний допустимий розв'язок буде оптимальним і процес розв'язання припиняється.

б) Якщо хоча б одна із змінних одержаного розв'язку не задовільняє умові цілочисельності, то оптимальне рішення не знайдено. Переходимо до п. 3.

3. Реалізувати наступні ітерації:

Вибрати змінну x_i , величина якої не задовольняє умові цілочисельності в оптимальному рішенні допоміжної задачі. Тоді деякі із x_{ij} серед елементів x_i -рядка мають дробові значення. Якщо ця умова не виконується, то задача (1) не має цілочисельного розв'язку.

Позначимо через $[x_i]$ та $[x_{ij}]$ - цілі частини відповідних чисел x_i та x_{ij} , тобто це найбільші числа, що не перевищують величини чисел x_i та x_{ij} , відповідно. Тоді величини дробових частин q_i та q_{ij} чисел x_i та x_{ij} визначаються як різниці

$$x_i - [x_i] = q_i \text{ та } x_{ij} - [x_{ij}] = q_{ij}, \quad (3)$$

де $q_i \geq 0$ та $q_{ij} \geq 0$.

Згідно умови $x_j \geq 0$ ($j = \overline{1, n}$) невід'ємні цілі числа, то і різниця

$$q_{i1}x_1 + q_{i2}x_2 + \dots + q_{in}x_n - q_i \geq 0 \quad (4)$$

також ціле невід'ємне число.

Нерівність (4) можна привести до рівняння введенням додаткової невід'ємної змінної x_k .

$$\text{Маємо } q_{i1}x_1 + q_{i2}x_2 + \dots + q_{in}x_n - x_k = q_i \quad (5)$$

Домножимо обидві частини рівняння (5) на (-1) і одержаний результат допишемо до останньої симплекс-таблиці як $(m+1)$ рядок.

Застосувавши подвійний симплекс-метод, знаходимо наступний допустимий розв'язок. Перейти до п. 2. Якщо одержаний розв'язок не задовольняє умову цілочисельності, по за останньою симплекс-таблицею будемо нове обмеження і так далі... доки не одержимо оптимальне рішення або не впевнимось, що його не існує.

Зауваження. Якщо в оптимальному розв'язку допоміжної задачі декілька змінних виражені дробовими числами, то додаткове обмеження складають для $\max\{q_i\}$. Це прискорює процес одержання оптимального цілочисельного рішення.

Метод розв'язання подібного типу проблем проілюструємо на наступному прикладі.

Приклад 51. Знайти максимальне значення функції $Z = x_1 + 2x_2$

$$\text{При обмеженнях } \begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3x_1 + x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \text{ та } x_j - \text{цілі числа } j = \overline{1, 2}.$$

Розв'язання. Відповідна допоміжна задача може бути записана в наступному вигляді:

$$Z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\text{при обмеженнях } \begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3x_1 + x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \text{ та } x_j - \text{цілі числа } j = \overline{1, 2}.$$

Застосувавши симплекс-метод, одержуємо оптимальний розв'язок допоміжної задачі, який представлено в таблиці 3.

Таблиця 3

Рядок	x_B (базис)	C (const)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z
1	x_3	28/5	0	0	1	1/5	3/5	0
2	x_2	12/5	0	1	0	3/5	2/5	0
3	x_1	1/5	1	0	0	-1/5	1/5	0
0	Z	5	0	0	0	1	1	1

В силу того, що одержаний оптимальний розв'язок допоміжної задачі не задовільняє умові цілочисельності, оптимальне рішення вихідної задачі поки що не знайдено.

Маємо три змінні - x_1 , x_2 та x_3 , які в оптимальному розв'язку виражені дробовими числами.

$$x_1 = \frac{1}{5}; x_2 = \frac{12}{5} \text{ та } x_3 = \frac{28}{5}.$$

Серед них вибираємо одну змінну, що має найбільшу дробову частину.

Дробові частини змінних x_1 , x_2 та x_3 визначаються як $x_i - [x_i] = q_i$. Маємо

$$[x_1] = \left[\frac{1}{5} \right] = 0; [x_2] = \left[\frac{12}{5} \right] = 2 \text{ та } [x_3] = \left[\frac{28}{5} \right] = 5 \text{ тоді}$$

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= x_1 - [x_1] = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}; \\ q_2 &= x_2 - [x_2] = \frac{12}{5} - 2 = \frac{2}{5}; \\ q_3 &= x_3 - [x_3] = \frac{28}{5} - 5 = \frac{3}{5} \end{aligned} \right\} \max \{q_i\} = \max \left\{ \frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{3}{5} \right\} = \frac{3}{5}.$$

Отже, додаткові обмеження будемо для змінної x_3 .

Використавши елементи x_3 -рядка, визначаємо відповідні дробові частини як $x_{ij} - [x_{ij}] = q_{ij}$.

$$\text{Маємо } [x_{31}] = 0; [x_{32}] = 0; [x_{33}] = 1; [x_{34}] = \left[\frac{1}{5} \right] = 0; [x_{35}] = \left[\frac{3}{5} \right] = 0$$

$$\text{та } q_{31} = 0; q_{32} = 0; q_{33} = 1 - 1 = 0; q_{34} = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}; q_{35} = \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5}.$$

Тоді додаткове обмеження має вигляд:

$$q_{34}x_4 + q_{35}x_5 - q_3 \geq 0 \text{ або } \frac{1}{5}x_4 + \frac{3}{5}x_5 - \frac{3}{5} \geq 0$$

Остання нерівність перетворюється в рівняння введенням додаткової невід'ємної змінної x_6 .

$$\text{Маємо } \frac{1}{5}x_4 + \frac{3}{5}x_5 - x_6 = \frac{3}{5} \text{ або } -\frac{1}{5}x_4 - \frac{3}{5}x_5 + x_6 = -\frac{3}{5}.$$

Остання симплекс-таблиця (табл. 3) представляється у вигляді

Таблиця 4

Рядок	x_B (базис)	C (const)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z
1	x_3	28/5	0	0	1	1/5	3/5	0	0
2	x_2	12/5	0	1	0	3/5	2/5	0	0
3	x_1	1/5	1	0	0	-1/5	1/5	0	0
4	x_6	-3/5	0	0	0	-1/5	-3/5	1	0
0	Z	5	0	0	0	1	1	0	1

$\times (-\frac{5}{3}); (-\frac{3}{5}); (-\frac{2}{5}); (-\frac{1}{5}); (-1)$

Застосувавши подвійний симплекс-метод, одержуємо наступний допустимий розв'язок (див. табл. 5).

Таблиця 5

Рядок	x_B (базис)	C (const)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z
1	x_3	5	0	0	1	0	0	0	0
2	x_2	2	0	1	0	7/15	0	2/3	0
3	x_1	0	1	0	0	-4/15	0	1/3	0
4	x_5	1	0	0	0	1/3	1	-5/3	0
0	Z	4	0	0	0	2/3	0	5/3	1

$$\vec{X}_5 = \{0; 2; 5; 0; 1; 0\} \text{ та } Z=4.$$

Тому що одержаний розв'язок задовольняє умові цілочисельності, оптимальне рішення одержано.
 $Z_{\max} = 4$.

Завдання для самостійної роботи

В завданнях 1-5 знайти цілочисельні розв'язки кожної задачі лінійного програмування

- | | |
|---|---|
| 1. $f = 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \min$
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 5 \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad x_j - \text{ціле}, j = \overline{1,3}$ | 4. $f = x_1 + 4x_2 \rightarrow \min$
$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6\frac{1}{3} \\ x_1 + 3x_2 \leq 4 \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad x_j - \text{ціле}, j = \overline{1,3}$ |
| 2. $f = -2x_1 - 5x_2 \rightarrow \min$
$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ 2x_1 + 8x_2 \leq 31 \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad x_j - \text{ціле}, j = \overline{1,3}$ | 5. $f = 7x_1 + x_2 \rightarrow \min$
$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 110 \\ 11x_1 - 3x_2 - x_4 = 24 \\ 2x_1 - 7x_2 - x_5 = 15 \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad x_j - \text{ціле}, j = \overline{1,3}$ |
| 3. $f = -38x_1 - 20x_2 - 41x_3 - 35x_4 \rightarrow \min$
$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 32 \\ -3x_3 + 5x_4 \leq 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 17 \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad x_j - \text{ціле}, j = \overline{1,3}$ | |

Розділ 10. Дослідження операцій

Тема 21. Предмет та задачі дослідження операцій

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, який містить наступні питання: іконічні моделі, моделі-аналоги та символічні або математичні моделі.

Термінологічний словник ключових понять

Іконічні моделі використовуються для того, щоб наглядно представити те, що пропонується.

Архітектурну модель житлового комплексу або планетарій як представлення небесної сфери тощо є прикладами наглядних або іконічних моделей.

Моделі-аналоги співставляють певні властивості об'єктів, що моделюються, з відповідними характеристиками інших об'єктів але останні при цьому можуть бути наглядно представлені. Наприклад, поняття температури можна описати за допомогою графіка, на якому величина градуса еквівалентна точно визначеній одиниці відстані. Або поняття часу можна представити у вигляді руки, що вказує на годинник тощо.

Математична модель представляє умовний образ зображення об'єкту побудованого для спрощення його дослідження, у вигляді абстрактних символів.

Наприклад, відоме рівняння Ейнштейна $e=mc^2$ встановлює у вигляді символів, що енергія e , яка міститься в масі m , прямо пропорційна швидкості світла. Ця модель є прикладом детермінованої математичної моделі.

Модель, що являє собою сукупність математичних співвідношень, називають математичною.

Моделі, що розробляються з метою передбачення майбутнього, називають **прогнозними**. Зокрема, при системному дослідженні економіки за допомогою математичних моделей виділяють макро та мікромоделі. **Макроекономічні моделі** – це моделі, що відображають функціонування економіки як єдиного цілого.

Мікроекономічні моделі – це моделі, що пов'язані, як правило з такими підрозділами економіки як підприємства та фірми. Прикладами макроекономічних моделей є моделі прогнозування валового національного продукту або прогнозування рівня безробіття, що передбачає певний обсяг федеральних витрат або чітко визначену монетарну політику. Транспортні, сітьові моделі, моделі теорії ігор тощо є прикладами мікроекономічних моделей. Модель може бути нормативною і базуватись на оптимізації. При цьому вона використовується як допоміжний засіб допустимих розв'язків певних проблем та відповідного аналізу з метою для одержання досягнення оптимального рішення.

Основні елементи моделей

Математична модель – це система математичних співвідношень, що наближено у абстрактній формі описує досліджуванний процес, даючи не тільки статистичну, а й динамічну інформацію про об'єкт.

Підібравши підходящі моделі до аналізу реально існуючих ситуацій можна спрогнозувати певні наслідки нашої діяльності або визначити варіанти поведінки досліджуваної системи як відгук на впровадження спеціальних альтернативних рішень (заходів).

В більшості випадків реалізація моделі надає можливість визначити краще або оптимальне рішення.

Моделі, що використовуються в прийнятті управлінських рішень, як правило, побудовані на емпіричній інформації кількісного характеру. При цьому, взаємозалежність чинників, що формують модель, представлені у вигляді фіксованих числових значень.

Основними компонентами математичних моделей є змінні та взаємозалежності факторів, що включені в модель.

Змінні, що включені в модель, можуть представляти:

1) величини, що у вигляді ряду числових значень характеризують наприклад, реально існуючі рівні банківських вкладень, розподілу бюджетних асигнувань, результати проведених опитувань громадської думки, фізичних експериментів тощо;

2) коди, що упорядковують за певним правилом (критерієм) наприклад, проекти, об'єкти, заявки, населення, групи, пропозиції тощо.

Математичні моделі прийняття рішень

Загальна математична модель може бути представлена в компактному формальному вигляді.

При цьому, множину контрольованих змінних позначаємо $X = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$, тобто в моделі n контрольованих (регульованих) змінних.

Наприклад, підприємець повинен визначити, яку кількість одиниць продукції необхідно виробити в кожному із $n=5$ наступних тижнів.

Тому, x_j – змінна, що позначає рівень виробництва певної продукції впродовж j -ого тижня, де $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Зазначимо, що підприємець повинен визначити певні рівні для цих п'яти змінних. Неконтрольовані змінні цієї міні-проблеми інтерпретують як можливий обсяг щотижневих рівнів виробництва і позначають y_j .

Стосовно, проблеми підприємця, значення y_j , $j = \overline{1, 5}$ можна вважати величиною очікуваних потреб споживачів, які необхідно задовольнити j -им щотижневим рівнем виробництва.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

2 Математичні методи в прийнятті управлінських рішень

Постановка задачі виробничої міні-ситуації.

Приклад 52. Виробнича компанія по виготовленню меблів намагається визначити, в якій кількості доцільно виробити стільців та столів щоб оптимально розподілити ресурси підприємства. Компанія у своєму розпорядженні має 400 футів спеціальних пластин червоного дерева та 450 трудо-годин майстрів виконання всіх робіт. На виготовлення одного стільця та столу необхідно 5 та 20 футів дерев'яних пластин відповідно. Процес виробництва стільця вимагає 10 годин, для столу – 15 годин роботи майстрів. Компанія одержує прибуток в розмірі 45 (грн.) на кожному стільці та 80 (грн.) на столі відповідно.

Побудувати математичну модель виробничої ситуації, знайти оптимальну програму виробництва, при якій прибуток підприємства буде максимальним.

Розв'язання. Задану інформацію представимо у вигляді таблиці.

Таблиця 1

Види ресурсів підприємства	Витрати ресурсів підприємства на одиницю продукції		Обсяг ресурсів
	стілець	стіл	
Пластини дерева	5	20	400
Працегодини	10	15	450
Прибуток за одиницю продукції (грн.)	45	80	

Побудова математичної моделі виробничої ситуації.

Для побудови математичної моделі введемо позначення.

Нехай x_1 – кількість виготовлених стільців;

x_2 – кількість виготовлених столів;

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

Необхідно максимізувати прибуток підприємства, тобто знайти максимальне значення функції:
 $f = 45x_1 + 80x_2 \rightarrow \max.$

Що задовольняє системі обмежень:

$$\begin{cases} 5x_1 + 20x_2 \leq 400 \rightarrow \text{обмеження на запаси деревини,} \\ 10x_1 + 15x_2 \leq 450 \rightarrow \text{обмеження на працегодини майстрів} \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Реалізація математичної моделі.

Виконавши графічний метод розв'язання задач лінійного програмування, одержимо оптимальний розв'язок задачі

I. (1): $5x_1 + 20x_2 = 400$ (2): $10x_1 + 15x_2 = 450$

(1)

x_1	x_2
0	20
80	0

(2)

x_1	x_2
0	30
45	0

II. $\vec{OP}(45;80)$

III. $f=0$

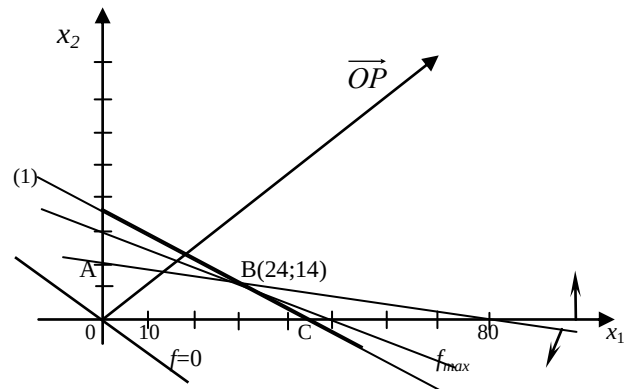
IV.

$$\begin{cases} 5x_1 + 20x_2 = 400 & \times (-2) \\ 10x_1 + 15x_2 = 450 & \quad \quad \quad \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10x_1 - 40x_2 = -800 \\ 10x_1 + 15x_2 = 450 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-25x_2 = -350$$

$$x_2 = 14 \quad i \quad x_1 = 24$$

$$f_{max} = 45 \cdot 24 + 80 \cdot 14 = 1080 + 1120 = 2200 \text{ (грн).}$$



Отже, оптимальне рішення виробничої проблеми становить 24 стільці та 14 столів. При цьому підприємство повністю використовує всі свої ресурси. Це підтверджується тим, що нерівність-обмеження на запаси сировини, тобто $5x_1 + 20x_2 \leq 400$ при підстановці оптимальних значень змінних перетворюється в рівність $5 \cdot 24 + 20 \cdot 14 = 400$. Аналогічний результат одержуємо і для другого обмеження: $10 \cdot 24 + 15 \cdot 14 = 450$.

Завдання для самостійної роботи

1.Компанія випускає дві моделі радіогодинників А та В: модель А потребує $15 + \alpha_1$ хвилин виробничого часу І-ї автоматичної лінії і $10 + \alpha_2$ хвилин – другої лінії. Для моделі В необхідно $10 + \beta_1$ хвилин роботи І-ї автоматичної лінії та $12 + \beta_2$ хвилин І-ї лінії. Виробничий час за один день для І-ї автоматичної лінії не перевищує $18 + c_1$, другої лінії $15 + c_2$. Розрахунки показують, що компанія може одержати $12 + i$ грн прибутку від реалізації моделі А та $10 + i$ грн від реалізації моделі В. Знайти оптимальну кількість моделей кожного виду, що може випустити компанія за один день, щоб її прибуток був оптимальним.

а) $i = 5; \alpha_1 = 1; \alpha_2 = 2; \beta_1 = \beta_2 = 2; c_1 = 5; c_2 = 2;$

б) $i = 2; \alpha_1 = 2; \alpha_2 = 1; \beta_1 = 1; \beta_2 = 2; c_1 = 3; c_2 = 1;$

в) $i = 3; \alpha_1 = 1; \alpha_2 = 3; \beta_1 = \beta_2 = 1; c_1 = 2; c_2 = 3.$

Побудувати математичні моделі до заданої та подвійної задачі попередньо її сформулювавши. Знайти оптимальні рішення обох задач. Використавши маргінальний аналіз, оцінити організацію виробничого процесу компанії.

Тема 22. Задачі масового обслуговування

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, який містить наступні питання: показниковий та пуассонівський розподіли, основні елементи СМО, розрахунок параметрів СМО з відмовленням.

Термінологічний словник ключових понять

Показниковий та Пуассонівський розподіли доцільно застосовувати для оцінки ефективності організації підприємницької діяльності, яку в багатьох випадках можна розглядати як СМО, зокрема, ці розподіли використовують для знаходження, наприклад, очікуваної кількості покупців за годину, або кількості механізмів, що вийшли з ладу за певний проміжок часу і очікують ремонту тощо. Всі ці ситуації є типовими для бізнес-діяльності і пов'язані із проблемою черг, з необхідністю її упорядкування з метою підвищення якості обслуговування споживачів. Не зупиняючись на теоретичних передумовах застосування СМО, розглянемо типи СМО, найбільш поширені на практиці.

Характеристика елементів СМО.

Основними елементами СМО є: вхідний потік вимог, черга вимог, канали обслуговування, вихідний потік вимог. Схематично це зображено на рис.21.



Рис. 21

В залежності від характеру формування черг СМО розрізняють:

- 1) системи з відмовленнями, в яких, при зайнятості всіх каналів обслуговування, заявка не встає в чергу, а просто залишає систему;
- 2) системи з необмеженою чергою, в яких заявка встає в чергу, якщо в момент її появи всі канали були зайняті.

Розглянемо більш детально елементи СМО.

Вхідний потік: найбільш поширеним на практиці є найпростіший вхідний потік, що характеризується властивостями стаціонарності, ординарності та відсутності післядії.

В цьому випадку, ймовірність того, що число заявок, що надійшло в систему на обслуговування за проміжок часу t , дорівнює k , визначається за законом Пуассона

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}. \quad (1)$$

де: λ - інтенсивність потоку заявок, тобто середнє число заявок в одиницю часу:

$$\lambda = \frac{1}{\bar{\tau}}. \quad (2)$$

$\bar{\tau}$ - середнє значення інтервалу часу між двома надходженнями заявок і може бути розподілено за експоненціальним законом із щільністю ймовірностей

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (3)$$

Вважають, що час очікування в черзі початку обслуговування – випадкова величина, яка розподілена експоненціально. Тому

$$f(t) = \nu e^{-\nu t}, \quad (4)$$

де: ν - інтенсивність руху черги, тобто середнє число заявок, що надходять на обслуговування за одиницю часу:

$$\nu = \frac{1}{\bar{t}_{об}}, \quad (5)$$

де: $\bar{t}_{об}$ - середнє значення часу очікування в черзі.

Вихідний потік вимог тісно пов'язаний із потоком обслуговування в каналі. При цьому тривалість обслуговування $\bar{t}_{обс}$ вважається випадковою величиною, що розподілена за показниковим законом із щільністю ймовірності

$$f(t_{обс}) = \mu \cdot e^{-\mu t}, \quad (6)$$

де: μ - інтенсивність потоку обслуговування, тобто середнє число заявок, що обслуговується в одиницю часу:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{обс}}. \quad (7)$$

$\bar{t}_{об}$ - середній час обслуговування.

Важливою характеристикою СМО, що об'єднують λ та μ , є інтенсивність навантаження або параметр навантаження

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (8)$$

слід відзначити, що одиниці вимірювання для параметрів λ та μ повинні бути однаковими. СМО, як об'єкт функціонування, може бути оцінена за наступними показниками. Розглядаємо n -канальні СМО.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання Розрахунок параметрів СМО з відмовленням.

Для систем з відмовленнями:

1. Ймовірність простою каналів обслуговування, коли в системі не має заявок ($k=0$):

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \rho^k / k!}. \quad (9)$$

2. Ймовірність відмови в обслуговуванні, коли заявка, що надійшла на обслуговування знайде всі канали зайнятими ($k=n$):

$$P_{від} = P_n = P_0 \cdot \frac{\rho^n}{n!}. \quad (10)$$

3. Ймовірність обслуговування: $P_{обс} = 1 - P_{від}$. (11)

4. Середнє число каналів, зайнятих обслуговуванням: $\bar{n}_3 = \rho \cdot P_{обс}$. (12)

5. Доля каналів, зайнятих обслуговуванням: $k_3 = \bar{n}_3 / n$. (13)

6. Абсолютна пропускна здатність СМО:

Розрахунок параметрів СМО з очікуванням.

Для систем з чергою:

1. Ймовірність простою каналів, коли в системі не має заявок ($k=0$):

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \rho^k / k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \quad (15)$$

вважається, що $\rho/n < 1$.

2. Ймовірність, що в даний момент часу обслуговується k заявок:

$$P_k = \rho^k \cdot P_0 / k! \quad 1 \leq k \leq n \quad (16)$$

3. Ймовірність, що всі канали зайняті обслуговуванням:

$$P_n = \rho^n \cdot P_0 / n! \quad (17)$$

4. Ймовірність, що заявка стане в чергу:

$$P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \cdot P_0 \quad (18)$$

5. Середнє число заявок в черзі:

$$\bar{L}_{чер} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2} \cdot P_0 \quad (19)$$

6. Середній час очікування заявки в черзі:

$$\bar{t}_{оч} = \bar{L}_{чер} / \lambda \quad (20)$$

7. Середній час перебування заявки в СМО:

$$\bar{t}_{СМО} = \bar{t}_{оч} + \bar{t}_{обс} \quad (21)$$

8. Середнє число каналів, зайнятих обслуговуванням:

$$\bar{n}_3 = \rho \quad (22)$$

9. Середнє число каналів, не зайнятих обслуговуванням:

$$\bar{n}_s = n - \bar{n}_3 \quad (23)$$

10. Коефіцієнт зайнятості каналів обслуговування:

$$k_3 = \frac{\bar{n}_3}{n} \quad (24)$$

11. Середнє число заявок в СМО:

$$Z = \bar{L}_{чер} + \bar{n}_3 \quad (25)$$

Приклади розв'язування задач СМО.

Розглянемо приклади розв'язання задач для n -канальної системи масового обслуговування.

Приклад 53. У відділі контролю якості, виробленої фірмою продукції, працюють три контролери. Якщо продукція надходить у відділ контролю, коли всі контролери зайняті експертизою, то продукція не перевіряється. В середньому за годину у відділ надходить 24 зразки продукції. Експертиза одного зразка потребує в середньому 5 хвилин. Визначити характеристики роботи відділу контролю якості як об'єкта СМО.

Розв'язання. За умовою задачі $n=3$ $\lambda=24$ 1/год=0,4 1/хв $\bar{t}_{обс} = 5$ хв., тоді $\mu=0,2$; $\rho=\lambda/\mu=2$.

1. Ймовірність простою каналів системи:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \rho^k / k!} = \frac{1}{2^0 / 0! + 2^1 / 1! + 2^2 / 2! + 2^3 / 3!} = 0,1587.$$

2. Ймовірність відмови в обслуговуванні:

$$P_{від} = P_n = 0,1587 \cdot 2^3 / 3! = 0,21.$$

3. Ймовірність обслуговування:

$$P_{обс} = 1 - 0,21 = 0,79.$$

4. Середнє число каналів, що зайняті обслуговуванням:

$$\bar{n}_{обс} = 2 \cdot 0,79 = 1,58.$$

5. Доля каналів, що зайняті обслуговуванням:

$$k_3 = 1,58 / 3 = 0,526.$$

6. Абсолютна пропускна здатність системи:

$$A = 0,4 \cdot 0,79 = 0,316.$$

Інтерпретація. На основі проведених обчислень можна стверджувати, що при трьох контролерах ($n=3$) процент неперевіреної продукції в середньому становить 21%. При цьому в середньому контролери будуть зайняті експертизою на 53%.

Приклад 54. Ресторан швидкого обслуговування пропонує власникам автомобілів додаткові послуги у вигляді можливості одержати замовлення не виходячи із авто. При цьому одночасно може обслуговуватись три автомобілі. В середньому до ресторану прибувають 30 автомобілів на годину. На обслуговування одного замовлення необхідно в середньому 3 хв. розглядаючи додаткові послуги ресторану як об'єкт СМО, оцінити основні параметри його функціонування.

Розв'язання. За умовою $n=3$, $\lambda=30$ 1/год= $1/2$ 1/хв $\bar{t}_{обс} = 3$ хв; $\mu = \frac{1}{\bar{t}_{обс}} = \frac{1}{3}$ 1/хв; $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1/2}{1/3} = 1,5$.

1. Ймовірність простою каналів обслуговування:

$$P_0 = \frac{1}{1,5^0/0! + 1,5^1/1! + 1,5^2/2! + 1,5^3/3! + 1,5^4/3!(3-1,5)} = 0,21$$

2. Ймовірність, що 3 автомобілі одночасно прибули на обслуговування:

$$P_n = \frac{1,5^3}{3!} \cdot 0,21 = 0,12.$$

3. Ймовірність, що автомобіль опиниться в черзі:

$$P_{оч} = \frac{1,5^4}{3!(3-1,5)} \cdot 0,21 = 0,12.$$

4. Середнє число автомобілів у черзі до ресторану:

$$\bar{L}_{чер} = \frac{1,5^4}{(3-1)!(3-1,5)^2} \cdot 0,21 = 0,24.$$

5. Середній час очікування автомобіля у черзі

$$\bar{t}_{чер} = \frac{0,24}{0,5} = 0,48 \text{ хв.}$$

6. Середній час очікування автомобіля у СМО:

$$\bar{t}_{СМО} = 0,48 + 3 = 3,48 \text{ хв.}$$

7. Середнє число каналів, вільних від обслуговування:

$$\bar{n}_e = 3 - 1,5 = 1,5.$$

8. Коефіцієнт зайнятості каналів обслуговування:

$$k_s = \frac{1,5}{3} = 0,5.$$

9. Середнє число автомобілів у СМО

$$\bar{Z} = 0,24 + 1,5 = 1,74 \text{ машин.}$$

Інтерпретація. На основі проведених обчислень можна стверджувати, що ймовірність простою каналів обслуговування в середньому дорівнює 21%, а ймовірність автомобілю опинитись у черзі становить 12%, середня кількість автомобілів у черзі 0,24, тобто практично черги не має. Це підтверджується і величиною часу очікування обслуговування, що дорівнює 0,48 хв.

Завдання для самостійної роботи

1. Популярний універсам швидкого обслуговування спеціалізується на продажу харчових продуктів, розфасованих невеликими порціями. Керівництво універсаму занепокоєне, що в години «пік», тобто коли люди повертаються з роботи, утворюються черги до касових апаратів. Цей факт, на їх думку, несе загрозу іміджу «швидкого обслуговування», що їх приваблює більшість покупців в універсам. Проведені дослідження дозволили виявити, що в середньому в години «пік» α покупців за годину відвідують універсам.

Обслуговування одного покупця в середньому вимагає β секунд. Керівництво бажає оцінити можливий збиток від утворення черг до касових апаратів.

Вважаючи, що: а) $n = 1$; $\alpha = 89$; $\beta = 47$; б) $n = 2$; $\alpha = 89$; $\beta = 47$; в) $n = 3$; $\alpha = 89$; $\beta = 47$ оцінити основні параметри організації роботи універсаму, як об'єкта СМО. Надайте керівництву необхідні рекомендації щодо покращення роботи універсаму.

2. Черговий по адміністрації міста має n телефонів. Телефонні дзвінки надходять в адміністрацію з інтенсивністю α заявок за годину. Тривалість телефонної розмови в середньому дорівнює β хв.

Вважаючи, що: а) $n = 3$; $\alpha = 90$; $\beta = 2$; б) $n = 4$; $\alpha = 110$; $\beta = 3$; в) $n = 5$; $\alpha = 120$; $\beta = 2$ оцінити основні показники організації роботи чергового від адміністрації як об'єкта СМО.

Тема 23-24. Задачі та моделі оптимального розподілу ресурсів. Задачі упорядкування та координації. Сітьове планування.

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, який містить наступні питання: сітьова модель, робота, фіктивна робота, подія, критичний шлях, методика побудови сітьових графіків.

Термінологічний словник ключових понять

Широке застосування математичних моделей, обумовлене можливістю побудови програми робіт на основі сітьових графів, що дозволяє аналізувати ефективність реалізації складних проектів (наприклад, пов'язаних із будівництвом, виробництвом тощо).

Сучасне сітьове планування починається із розбивки програми робіт на незалежні операції та відповідні події. Кожна операція, тобто діяльність, вимагає певного проміжку часу і передбачає упорядкування за часом.

Сітьова модель – це графічне зображення плану виконання комплексу робіт, що складається із орієнтованих дуг (робіт), та вузлів (подій). І тому, після упорядкування вимог до виконання робіт (за часом) будь-який проект можна представити у вигляді орієнтованого графа без контурів.

Сітьова модель без контурів – це орієнтований граф, що не має циклів, тобто залишаючи певний вузол ми не можемо повернутись назад (подія уже здійснилась). В сітьовому моделюванні розрізняють два основних елементи – робота, як діяльність, та подія.

Робота – це активний процес, який вимагає затрат ресурсів або пасивний (очікування), та призводить до запланованих результатів.

Фіктивна робота – це взаємозалежність між результатами робіт (подіями), що не потребує затрат часу та ресурсами.

Подія – це результат виконання одної або декількох попередніх робіт.

Мінімум часу для завершення усього проекту – це найбільша величина сумарного часу, потрібного для проходження шляху від 0-початкового вузла (початкової події) до m -завершальної події.

Шлях – це будь-яка неперервна послідовність робіт та подій.

Критичний шлях – це шлях, що не має резервів й містить найбільш напружені роботи комплексу. І тому критичний шлях – це найдовший маршрут (за часом) від початкової до завершальної події.

Роботи, що знаходяться на критичному шляху вимагають якісного управління, тому що недоержання термінів їх виконання ставить під загрозу виконання (за часом) усього комплексу робіт.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

1 Методика побудови сітьових графіків.

При побудові сітьових моделей необхідно притримуватись наступних правил.

1. Якщо відома початкова подія, позначена 0-вузлом, то можна визначити числову послідовність подій усіх останніх вузлів моделі.

1. Модель зображується зліва направо і кожна напрямлена дуга виходить із i -ого вузла і входить до j -ого вузла ($j > i$). При цьому термін виконання роботи (i, j) позначають як t_{ij} і записують над стрілками.

2. Завершальна подія позначається найбільшим числом в заданій числовій послідовності вузлів.

3. Дві події i та j можуть пов'язуватись тільки однією роботою, що зображується напрямленою від i до j стрілкою (дугою). Для зображення паралельних робіт вводяться проміжна подія та фіктивна робота (див. рис.23).

5. В сітьовій моделі не повинно бути проміжних подій, з яких не виходить або не входить хоча б одна робота (див. рис.24,25)

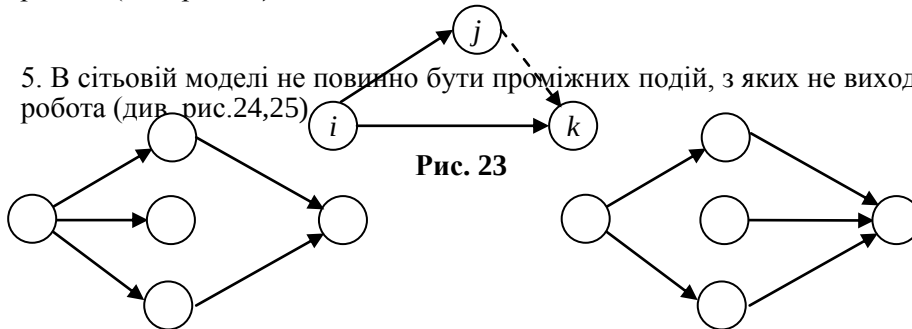


Рис. 23

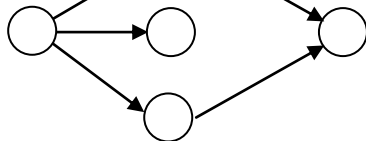


Рис. 24

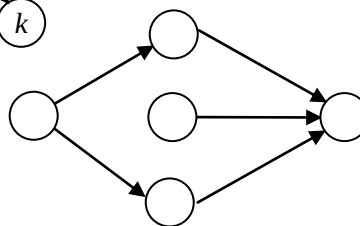


Рис. 25

Всі вищевикладені властивості ураховані при побудові сітьової моделі (див. Рис.26).

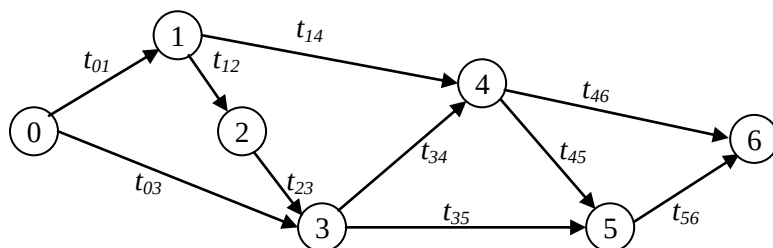


Рис. 26

2. Розрахунки основних параметрів сітьового графіка

Основними параметрами сітьової моделі вважають знаходження критичного шляху (за часом) від початкової події (0-вузла) до результуючої (m -вузла).

Розрахунок критичного шляху включає два етапи і буде детально розглянуто при розв'язанні прикладу 1.

Приклад 58. В таблиці 1 представлена інформація про деякий комплекс робіт, що включає перелік певних подій та термінів виконання відповідних робіт.

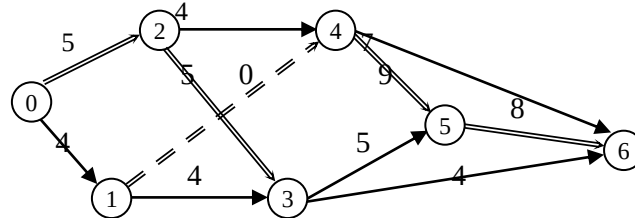
Таблиця 1

Робота (i,j)	(0,1)	(0,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(4,5)	(4,6)	(5,6)
Тривалість роботи (t_{ij})	4	5	4	5	4	0	5	4	9	7	8

Побудувати сітьову модель та знайти критичний шлях.

Розв'язання.

I. Відповідна сітьова модель має вигляд:



II. Визначимо критичний шлях.

Нехай $t_i^{p.n.}$ - ранній

Нехай $t_j^{p.n.}$ - ранній

Тоді $t_j^{p.n.} = \max(t_i^{p.n.} + t_{ij})$ для всіх (i,j) , де t_{ij} тривалість операції (i,j) . Згідно умови маємо:

$$t_1^{p.n.} = t_0^{p.n.} + t_{0,1} = 0 + 4 = 4; \quad t_2^{p.n.} = t_0^{p.n.} + t_{0,2} = 0 + 5 = 5;$$

$$t_3^{p.n.} = \max_{i=1,2} \{4 + 4; 5 + 5\} = 10; \quad t_4^{p.n.} = \max_{i=2,3} \{5 + 4; 10 + 0\} = 10;$$

$$t_5^{p.n.} = \max_{i=3,4} \{10 + 5; 10 + 9\} = 19; \quad t_6^{p.n.} = \max_{i=3,4,5} \{10 + 4; 10 + 7; 19 + 8\} = 27.$$

отже, перший етап завершено.

Переходимо до другого. Він складається із наступних дій.

1. Нехай $t_i^{n.3.}$ - пізній термін завершення усіх операцій, що входять у вузол i .

Якщо $i=1$ та n - завершальна подія сітьової моделі, то $t_n^{n.3.} = t_i^{p.n.}$, що i є відправною точкою оберненого шляху;

$$\text{Тоді } t_i^{n.3.} = \min_j \{t_j^{n.3.} - t_{ij}\} \text{ для всіх } (i,j). \text{ Маємо } t_6^{n.3.} = t_6^{p.n.} = 27; \quad t_5^{n.3.} = t_6^{n.3.} - t_{5,6} = 27 - 8 = 19;$$

$$t_4^{n.3.} = \min_{j=5,6} \{27 - 7; 19 - 9\} = 10; \quad t_3^{n.3.} = \min_{j=4,5,6} \{27 - 4; 19 - 5; 10 - 0\} = 10;$$

$$t_2^{n.3.} = \min_{j=3,4} \{10 - 4; 10 - 5\} = 5; \quad t_1^{n.3.} = t_3^{n.3.} - t_{1,3} = 10 - 4 = 6;$$

$$t_0^{n.3.} = \min_{j=1,2} \{5 - 5; 6 - 4\} = 0.$$

Другий етап обчислювальної процедури завершено и знаходимо роботи, що належать критичному шляху та його тривалість. Отже $t_{kp}=27$.

Крім того, операція (i,j) належить критичному шляху, якщо вона задовольняє умовам

$$t_i^{p.n.} = t_i^{n.3.}; \quad t_j^{p.n.} = t_j^{n.3.}; \quad t_j^{p.n.} - t_i^{p.n.} = t_j^{n.3.} - t_i^{n.3.} = t_{ij}$$

після виконання обчислень ми одержали роботи $(0,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$, $(5,6)$, що належать до критичного шляху..

Як правило, в сітьових моделях критичний шлях позначають подвійними стрілками. (Див. рис.5).

Операції сітьової моделі пов'язані ще двома параметрами.

Нехай $t_{ij}^{n.n.}$ - пізній срок початку робіт, що з'єднують вузли i та j . Тоді $t_{ij}^{n.n.} = t_j^{n.3.} - t_{ij}$ для всіх (i,j) .

Нехай $t_{ij}^{p.3.}$ - ранній термін завершення робіт, що з'єднують вузли i та j .

$$t_{ij}^{p.3.} = t_i^{p.n.} + t_{ij} \text{ для усіх } (i,j).$$

Розрізняють два види резервів часу для усіх робіт, що пов'язують події i та j :

1) Повний резерв часу - (r_{ij}^n) ;

2) Вільний резерв часу - (r_{ij}^e) , які можна обчислити за формулами:

$$r_{ij}^n = t_{ij}^{n.n.} - t_i^{p.n.} \text{ для усіх } (i,j) \quad 0$$

$$r_{ij}^e = t_j^{p.n.} - t_i^{p.n.} - t_{ij} \text{ для усіх } (i,j) \quad 0$$

Зауважимо, що для усіх робіт критичного шляху величини повного та вільного резервів дорівнюють нулю.

Використовуючи формули визначимо резерви часу для усіх робіт, що пов'язують події i та j прикладу 1. Одержані результати представимо в таблиці 2.

Таблиця 2

Робота (i,j)	Тривалість роботи t_{ij}	Ранній термін		Пізній термін		Повний резерв r_{ij}^n	Вільний резерв r_{ij}^6
		Початку $t_i^{p.n.}$	Завершення $t_{ij}^{p.з.}$	Початку $t_{ij}^{n.n.}$	Завершення $t_j^{n.з.}$		
(0,1)	4	0	4	2	6	2	0
(0,2)	5	0	5	0	5	0	0
(1,3)	4	4	8	6	10	2	2
(2,3)	5	5	10	5	10	0	0
(2,4)	4	5	9	6	10	1	1
(3,4)	0	10	10	10	10	0	0
(3,5)	5	10	15	14	19	4	4
(3,6)	4	10	14	23	27	13	13
(4,5)	9	10	19	10	19	0	0
(4,6)	7	10	17	20	27	10	10
(5,6)	8	19	27	19	27	0	0

Помічаємо, що для робіт (0,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6) критичного шляху резерви часу дорівнюють нулю.

В той же час, роботи, що не належать до критичного шляху мають резерви часу відмінні від нуля.

Для характеристики міри напруження термінів виконання робіт, що мають резерви часу, використовують величину напруження робіт. Позначимо її $K_n(i,j)$.

Коефіцієнт напруження роботи – це відношення тривалості двох відрізків шляху, що не співпадають, одним із яких є шлях максимального терміну тривалості робіт, що проходять через дану роботу, а другим – критичний шлях.

Позначимо через $t'_{kp}(z)$ тривалість відрізка критичного шляху, що співпадає зі шляхом $z(i,j)_{\max}$ і містить роботу (i,j) , маємо:

$$K_n(i,j) = \frac{t(z)_{\max} - t'_{kp}(z)}{t_{kp} - t'_{kp}(z)} \quad \text{або} \quad K_n(i,j) = 1 - \frac{r_{ij}^n}{t_{kp} - t'_{kp}(z)},$$

де r_{ij}^n - повний резерв для робіт (i,j) .

Величина коефіцієнта напруження дозволяє оцінити можливість ефективного розподілу резервів робіт, що не належать до критичного шляху. Якщо $K_n(i,j) \geq 0,8$, це означає, що робота знаходиться в критичній зоні.

Якщо $K_n(i,j) \in [0,6; 0,8)$, тоді робота належить до підкритичної зони.

При $K_n(i,j) < 0,6$ робота знаходиться в резервній зоні.

3. Приклади аналізу та оптимізації сітьового графіка.

Приклад 59. Нехай наступна сітьова модель описує деяку програму будівельних робіт (див. рис.27)

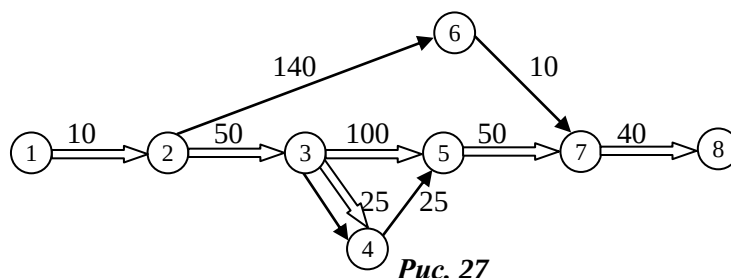


Рис. 27

Визначити критичний шлях, резерви часу та коефіцієнти напруження для усіх робіт (i,j) , що не належить до критичного шляху. Інтерпретуйте одержані результати.

Розв'язання. Знаходимо всі можливі шляхи від першого до восьмого вузла.

$$L_1 \rightarrow 1,2,6,7,8 \Rightarrow t(L_1) = 10 + 140 + 10 + 40 = 200$$

$$L_2 \rightarrow 1,2,3,5,7,8 \Rightarrow t(L_2) = 10 + 50 + 100 + 50 + 40 = 250$$

$$L_3 \rightarrow 1,2,3,4,5,7,8 \Rightarrow t(L_3) = 10 + 50 + 25 + 25 + 50 + 40 = 200.$$

Критичний шлях – це найдовший маршрут (за часом) між першим та восьмим вузлами. Тому $t_{kp} = 250$.

Ми визначимо, що роботи - (1,2), (2,3), (5,7), (7,8) лежать на критичному шляху, тоді як роботи (2,6), (6,7) та (3,4), (4,5) не лежать на ньому.

Визначимо коефіцієнти напруження робіт:

- 1) для (2,6) та (6,7)
- 2) для (3,4) та (4,5).

Використовуючи формулу $K_n(i,j) = \frac{t(z)_{\max} - t'_{kp}(z)}{t_{kp} - t'_{kp}(z)}$.

Маємо

$$а) K_n(2,6) = K_n(6,7) = \frac{200 - 50}{250 - 50} = 0,75.$$

$$б) K_n(3,4) = K_n(4,5) = \frac{200 - 150}{250 - 150} = 0,5.$$

Ви можете визначити значення коефіцієнтів напруження за іншою формулою, попередньо обчисливши повні резерви часу для відповідних робіт.

Інтерпретація. Роботи (1,2), (2,3), (3,5), (5,7) та (7,8) на критичному шляху і його величина $t_{kp}=250$. коефіцієнт напруження для робіт (2,6) та (6,7) дорівнює 0,75. Тому ці роботи знаходяться в підкритичній зоні. Роботи (3,4) та (4,5) - в резервній зоні, тому що коефіцієнт напруження 0,5.

Це означає, що не дивлячись на рівність повних резервів часу для робіт (2,6), (6,7) та для (3,4) і (4,5) (ви можете перевірити цей факт), терміни виконання робіт на шляху L_1 більш жорсткі ніж на шляху L_2 .

Завдання для самостійної роботи

1. Нехай задано сітьову модель, що описує деякий будівельний проект пронумерувати вузли та визначити критичний шлях;
- б) визначити резерви часу для усіх робіт моделі;
- в) знайти коефіцієнти напруження для некритичних робіт моделі;
- г) дати інтерпретацію одержаних результатів.

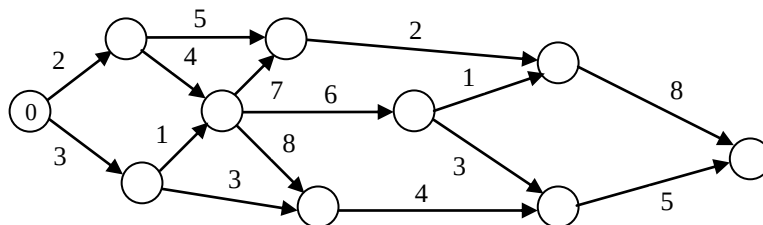


Рис. 28

2. У таблиці, поданій нижче, представлена інформація про деякий комплекс робіт, що включає перелік певних подій та термінів виконання відповідних робіт.

Робота (i,j)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,5)	(2,6)	(3,6)	(4,7)	(5,7)	(6,7)
Тривалість роботи (t _{ij})	10	6	4	6	8	4	12	6	10

Побудувати сітьову модель.

Визначити: а) критичний шлях;

б) резерви часу для усіх робіт моделі;

в) коефіцієнти напруження для усіх некритичних робіт;

г) дати інтерпретацію одержаних результатів.

Тема 25-26-27. Задачі та моделі заміни. Задачі з умовами невизначеності та конфлікту. Багатокритеріальні задачі в менеджменті.

Методичні рекомендації до вивчення теми

Необхідно розглянути теоретичний матеріал, який містить наступні питання: математична постановка задач теорії ігор, характеристика задач теорії ігор.

Термінологічний словник ключових понять

1. Теорія ігор: математичні моделі

Основна мета використання теорії ігор полягає в дослідженні наступної проблеми: для n гравців позначених $P_1, P_2, \dots, P_n$, що опинились в конфліктній ситуації, необхідно визначити оптимальну стратегію поведінки для всіх її учасників.

Тому, застосовуючи термін "гра", ми визначаємо множину правил, яким повинні слідувати всі гравці. Бути учасником гри - це означає можливість для кожного гравця реалізовувати індивідуальні варіанти своєї поведінки, що називають індивідуальною стратегією гравця.

Як результат гри кожен із учасників гри може виграти (або програти) певну суму. Якщо сума виграшу одного гравця дорівнює програшу іншого, то така гра є грою двох гравців з нульовою сумою.

2 Характеристика задач теорії ігор

Нехай задано платіжну матрицю гри $m \times n$

Припускаємо, що платіжна матриця не має сідлової точки.

Нехай оптимальне рішення заданої гри для першого гравця має вигляд:

для другого гравця:

3 Ідентифікація математичних моделей теорії ігор до моделей лінійного програмування

Перший гравець намагається максимізувати ціну гри v при заданих умовах та сумі відповідних

Отже, математична модель поведінки першого гравця може бути представлена як задача лінійного програмування, а саме:

[illegible]
$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot \frac{x_1}{v} + a_{21} \cdot \frac{x_2}{v} + ... + a_{m1} \cdot \frac{x_m}{v} \geq 1 \\ a_{12} \cdot \frac{x_1}{v} + a_{22} \cdot \frac{x_2}{v} + ... + a_{m2} \cdot \frac{x_m}{v} \geq 1 \\ \\ a_{1n} \cdot \frac{x_1}{v} + a_{2n} \cdot \frac{x_2}{v} + ... + a_{mn} \cdot \frac{x_n}{v} \geq 1 \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\text{або } x_i = t_i \cdot v, i = \overline{1, m} \quad (5)$$

$$t_1 + t_2 + \dots + t_m = \frac{1}{v} \text{ a } \sum_{i=1}^m t_i = \frac{1}{v} \quad (6)$$

Тому що $v \rightarrow \max$, $Z \rightarrow \min$.

Мінімізувати $Z = t_1 + t_2 + \dots + t_m$

[illegible]

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Тоді, очікуване значення гри має вигляд:

$$E = PAQ = [p_1 p_2 \dots p_m] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad (9)$$

Розглянемо приклади на обчислення очікуваного значення гри.

Практичні завдання і методичні рекомендації до їх виконання

Приклад 60. Розглянемо гру двох гравців R та C з платіжною матрицею A, де

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Обчислити очікуване значення гри, якщо гравці R та C реалізують свої змішані стратегії:

a. $p = [0,5 \quad 0,5]$ та $Q = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$

b. $p = [0,8 \quad 0,2]$ та $Q = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,9 \end{bmatrix}$

Розв'язання. а. Обчислимо

$$\begin{aligned} E = PAQ &= [0,5 \quad 0,5] \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} \\ &= [0,5 \quad 0,5] \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Отже, при грі протягом достатньо довгого періоду, вона закінчується з “нічийним” результатом.

b. Обчислимо

$$\begin{aligned} E = PAQ &= [0,8 \quad 0,2] \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,9 \end{bmatrix} \\ &= [2 \quad -1,4] \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,9 \end{bmatrix} = -1,06. \end{aligned}$$

Отже, гравець R у процесі довготривалої гри може очікувати в середньому на програш у сумі 1,06(грн.) за кожну гру.

Приклад 61. Як частину своєї інвестиційної діяльності компанія виділила 40000(грн.) для короткострокових інвестицій на фондовому та валютному ринках.

Вкладення інвестицій захищено нормою прибутку (це той процент, який пропонує банк своїм вкладникам). Зростання норми прибутку у загальному вигляді може привести до зростання інвестиційних вкладень на валютному ринку та відповідного спадання на фондовому. Нехай платіжна матриця представляє можливі варіанти очікуваного зростання або спадання величини кожного інвестиційного вкладення при встановленій нормі прибутку (у відсотках):

Інвестиції	Норма прибутку	
	Зростання	Падіння
Валютний ринок	15	10
Фондовий ринок	-5	25

а) Визначити оптимальні стратегії компанії в інвестуванні 40000(грн.)

б) Який прибуток від інвестування може очікувати компанія?

Розв'язання. а) Розглянемо дану ситуацію як матричну гру, в якій компанію будемо вважати першим гравцем. Позначаючи оптимальні стратегії компанії як $p = [p_1 \quad p_2]$ знаходимо:

$$p_1 = \frac{d - c}{a + d - b - c} = \frac{25 - (-5)}{15 + 25 - 10 - (-5)} = \frac{30}{35} \approx 0,86$$

та $p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0,86 = 0,14$

Отже, компанія може вкласти (0,86)(40000) або 34400(грн.) у фондовий ринок.

б). Очікувана ціна гри дорівнює

$$E = \frac{ad - bc}{a + d - b - c} = \frac{(15)(25) - (10)(-5)}{15 + 25 - 10 - (-5)} = \frac{425}{35} \approx 12,14.$$

Таким чином, компанія може очікувати на прибуток у 12,14% на загальну величину інвестицій у 40000(грн.), тобто прибуток має дорівнювати (0,1214)(40000) = 4856(грн.).

Завдання для самостійної роботи

1. Задано платіжну матрицю гри

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Обчислити очікуваний виграш для наступних пар стратегій та знайти оптимальні для гравця R.

а) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ б) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

в) $P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ г) $P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix}$

2. Задано платіжну матрицю гри $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Обчислити очікуваний виграш для наступних пар стратегій та знайти оптимальні для гравця R.